R.Živković - H.Fatkić - Z.Stupar

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE

sa rješenjima uputama i rezultatima

MATEMATIČKA LOGIKA I SKUPOVI

RELACIJE I FUNKCIJE

ALGEBARSKE STRUKTURE

BROJEVI

JEDNAČINA I NEJEDNAČINE

POLINOMI

ARITMETIČKI I GEOMETRIJSKI NIZ

»SVJETLOST« OOUR ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA, SARAJEVO

R. ŽIVKOVIĆ
H. HATKIĆ
[illegible] STUPAR

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE
sa rješenjima, uputama i rezultatima

ISBN 86-01-00487-3

Radomir ŽIVKOVIĆ — Huse FATKIĆ — Zoran STUPAR

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE

sa rješenjima, uputama i rezultatima

matematička logika i skupovi
relacije i funkcije
algebarske strukture
brojevi
jednačine i nejednačine
polinomi
aritmetički i geometrijski niz

Prvo izdanje

"SVJETLOST", OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva
Sarajevo, 1987.

Odgovorni urednik
Ramiz Džananović

Recenzenti:
Akademik dr *Veselin Perić*, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu
dr *Milenko Pikula*, docent Elektrotehničkog fakulteta u Sarajevu

Lektor *Ljiljana Cikota*

Naslovna strana *Mira Gogić*

Tehnički urednik *Bahrudin Mrehić*

Korektor *Branislava Varićak*

Crteže uradio *Batrić Perazić*

Izdaje: *"Svjetlost" OOUR Zavod za udžbenike i nastavna sredstva*, Sarajevo

Za izdavača *Abduselam Rustempašić*

Tiraž: 3000 primjeraka

Štampa: Štamparski zavod Ognjen Prica, Zagreb

Narodna i univerzitetska biblioteka BiH, Sarajevo
Katalogizacija u publikaciji (CIP)

517(075.8)(076)

ŽIVKOVIĆ, Radomir
Zbirka zadataka iz matematike : sa rješenjima, uputama i rezultatima / Radomir Živković, Huse Fatkić, Zoran Stupar ; [crteže uradio Batrić Perazić] . — 1. izd. — Sarajevo : Svjetlost, 1987. — 333 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Sadržaj s nasl. str.: Matematička logika i skupovi ; Relacije i funkcije : Algebarske strukture : Brojevi ; Jednačine i nejednačine ; Polinomi ; Aritmetički i geometrijski niz. — Bibliografija: str. 333.
ISBN 86-01-00487-3
1. Fatkić, Huse. 2. STUPAR, Zoran

ISBN 86-01-00487-3

SADRŽAJ

		Strana: Osnove teorije, zadaci	Strana: Upute, rješenja, rezultati
	Predgovor		
1.	**Elementi matematičke logike**	7	167
2.	**O skupovima**	12	170
3.	**O definicijama i aksiomama i o dokazivanju teorema**	20	
4.	**Binarne relacije**	27	175
5.	**Osnovni pojmovi kod funkcija. Ekvipotentni skupovi**	32	179
	5. 1. Osnovni pojmovi kod funkcija	32	179
	5. 2. Ekvipotentni skupovi	40	185
6.	**O algebarskim strukturama**	41	188
7.	**Prirodni brojevi**	46	193
8.	**Cijeli brojevi**	49	198
9.	**Racionalni i realni brojevi. Apsolutna vrijednost realnog broja**	52	201
	9. 1. Racionalni i realni brojevi	52	201
	9. 2. Apsolutna vrijednost realnog broja	54	204
10.	**Neke transformacije, jednakosti i nejednakosti brojevne sredine**	60	208
	10. 1. Neke transformacije i jednakosti u skupu realnih brojeva	60	208
	10. 2. Neke nejednakosti i brojevne sredine	63	212
11.	**Kompleksni brojevi**	68	217
	11. 1. Kompleksni brojevi u obliku parova i u algebarskom obliku	68	217
	11. 2. Kompleksni brojevi u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku	73	220
12.	**Linearne jednačine i sistemi linearnih jednačina**	79	226
	12. 1. Ekvivalentnost jednačina. Linearne jednačine	79	226
	12. 2. Sistemi od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate	83	228
	12. 3. Sistemi od tri i više linearnih jednačina	90	230
13.	**Linearne nejednačine i sistemi linearnih nejednačina**	96	235
14.	**Kvadratna funkcija. Kvadratne jednačine i nejednačine**	98	240
	14. 1. Nule i znak kvadratne funkcije. Kvadratne jednačine i nejednačine	98	240
	14. 2. Ekstrem i tok kvadratne funkcije	102	246
	14. 3. Vietove formule	103	248
	14. 4. Položaj nula kvadratne funkcije prema datom razmaku	106	249
15.	**Neke jednačine i nejednačine višeg stepena. Neki sistemi jednačina i nejednačina drugog i višeg stepena**	110	252
	15. 1. Jednačine višeg stepena	110	252
	15. 2. Sistemi jednačina drugog i višeg stepena	111	255
	15. 3. Nejednačine višeg stepena	113	263
	15. 4. Nejednačine drugog stepena sa dvije nepoznanice. Sistemi nejednačina drugog i višeg stepena	113	265
16.	**Iracionalne jednačine i nejednačine. Sistemi iracionalnih jednačina**	118	275
	16. 1. Iracionalne jednačine	118	275
	16. 2. Sistemi jednačina od kojih je bar jedna iracionalna	122	280
	16. 3. Iracionalne nejednačine	123	182
17.	**Eksponencijalna funkcija. Eksponencijalne jednačine i nejednačine**	127	286
	17. 1. Eksponencijalna funkcija	127	286
	17. 2. Eksponencijalne jednačine	129	288
	17. 3. Sistemi jednačina od kojih je bar jedna eksponencijalna	131	292
	17. 4. Eksponencijalne nejednačine	132	293

18. **Logaritamska funkcija. Logaritamske jednačine i nejednačine. Sistemi logaritamskih jednačina** 134 296
18. 1. Logaritamska funkcija 134 296
18. 2. Logaritamske jednačine 137 299
18. 3. Sistemi jednačina od kojih je bar jedna logaritamska 140 305
18. 4. Logaritamske nejednačine 141 306
19. **Polinomi. Racionalna rješenja algebarskih jednačina. Racionalne funkcije** . . . 144 310
19. 1. Polinomi 144 310
19. 2. Racionalna rješenja algebarskih jednačina 150 317
19. 3. Racionalne funkcije 152 319
20. **Aritmetički niz. Geometrijski niz i red. Neke sume** 157 322
20. 1. Aritmetički niz 157 322
20. 2. Geometrijski niz 159 324
20. 3. Beskonačni konvergentni geometrijski red 161 327
20. 4. Neke sume 163 329
Literatura 333

PREDGOVOR

Ova zbirka zadataka namijenjena je prvenstveno studentima matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu za predmet "Uvod u matematiku" i studentima Elektrotehničkog fakulteta u Sarajevu za predmete "Matematičke osnove" i "Uvod u matematiku" (poglavlja 1---9. i 12).

Zbirkom se mogu koristiti i studenti tehničkih i prirodno-matematičkih fakulteta i pedagoških akademija u drugim našim republikama i pokrajinama na kojima se izučavaju predmeti sa istim ili sličnim sadržajima.

Zadaci u Zbirci su pretežno iz gradiva elementarne matematike i to na nivou koji je nešto iznad nivoa srednje škole. Zato se Zbirkom mogu koristiti i nastavnici matematike srednjih škola sa matematičko-fizičkim i tehničkim usmjerenjima.

Učenici srednjih škola koji žele studirati više škole i fakultete na kojima se izučavaju neki matematički predmeti, naročito učenici koji su matematiku učili samo u zajedničkim osnovama opšteg obrazovanja mogu, uz pomoć ove zbirke, popuniti praznine i podići kvalitet svoga matematičkog obrazovanja neophodnog za uspješan studij. Prema tome, Zbirka, osim u organizovanom školskom radu, može poslužiti kao dobra osnova za samoobrazovanje. Smatrali smo da je u tome cilju bilo korisno učiniti sljedeće:

Prvo, za svako poglavlje gdje je to bilo potrebno, navesti najnužnije teorijske osnove, bez dokazivanja teorema, a uz te osnove navesti nekoliko detaljno izrađenih uglednih i tipičnih primjera.

Drugo, početne zadatke u poglavljima i u grupama zadataka odabrati nešto jednostavnije i uraditi ih malo detaljnije, pa su oni pogodni za pripremanje kvalifikacionih ispita iz matematike na tehničkim i prirodno-matematičkim fakultetima.

Treće, za gotovo sve zadatke navesti rezultate, za mnoge od njih dati upute i međurezultate, a za složenije zadatke navesti i rješenja.

*Složeniji zadaci su označeni znakom *.*

Recenzenti Zbirke prof. dr. Veselin Perić i docent dr. Milenko Pikula strpljivo su pregledali rukopis Zbirke, pa im toplo zahvaljujemo na učinjenom trudu. Naročitu zahvalnost dugujemo prof. Periću za brojne korisne primjedbe koje su doprinijele poboljšanju kvaliteta ove Zbirke.

Sarajevo, 1987 godine.

Autori

Prvi dio

TEORIJSKE OSNOVE I ZADACI

1. ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

Definicija 1.1 (intuitivna definicija iskaza): Pod *iskazom* (sudom) podrazumijevamo svaku smislenu izjavu za koju se može reći da li je tačna ili netačna (istinita ili neistinita). Tačan iskaz zovemo *tvrđenje* (*stav*).

Iskazi se označavaju latinskim i grčkim slovima (najčešće malim slovima latinice: $p, q, r, \ldots$). Ako je p istinit iskaz pišemo $p = \top$ (čita se "pe jednako te"), a ako je neistinit pišemo $p = \bot$ (čita se "pe jednako ne te"). To se još naznačava sa $\tau(p) = \top$ (čita se: "vrijednost istinitosti suda p jednako te") ili $\tau(p) = 1$, odnosno $\tau(p) = \bot$ (čita se "vrijednost istinitosti suda p jednako ne te") ili $\tau(p) = 0$.

Sa iskazima se, pomoću tzv. osnovnih *logičkih operacija*: konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalencija i negacija, prave novi iskazi.

Definicija 1.2 (definicija negacije): Ako je p iskaz, $\neg p$ (čita se: "ne pe") (ili $\overline{p}$, odnosno p') je oznaka za iskaz "Nije p" koji je tačan ako i samo ako je iskaz p netačan.

Ovu definiciju negacije možemo simbolički zapisati pomoću tzv. tablice istinitosti na sljedeći način:

p	$\neg p$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

Definicija 1.3 (definicija konjunkcije): Ako su p i q iskazi, $p \wedge q$ (ili $p \cdot q$) je oznaka za iskaz "p i q" koji ćemo zvati *konjunkcijom* iskaza p sa iskazom q, i koji ćemo smatrati tačnim ako i samo ako su oba iskaza p i q tačna.

Tablica istinitosti konjunkcije je sljedeća:

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Definicija 1.4 (definicija disjunkcije): Ako su p i q iskazi, $p \vee q$ (ili $p + q$) je oznaka za iskaz "p ili q" koji ćemo zvati *disjunkcija* iskaza p sa iskazom q, i koji ćemo smatrati netačnim ako i samo ako su oba iskaza p i q netačna.

Tablica istinitosti disjunkcije je sljedeća:

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Definicija 1.5 (definicija implikacije): Ako su p i q iskazi, $p \Rightarrow q$ je oznaka za iskaz "Ako je p, onda je q" koji ćemo zvati *implikacijom* iskaza p sa iskazom q, i koji ćemo smatrati netačnim ako i samo ako je iskaz p tačan, a iskaz q netačan.

Tablica istinitosti implikacije je sljedeća:

p	q	$p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Definicija 1.6 (definicija ekvivalencije): Ako su p i q iskazi, $p \Leftrightarrow q$ je oznaka za iskaz "p je onda i samo onda ako je q" koji ćemo zvati *ekvivalencijom* iskaza p sa iskazom q, i smatrati tačnim ako i samo ako su oba iskaza p i q istovremeno tačna ili netačna.

Tablica istinitosti ekvivalencije je sljedeća:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$

Formule pisane pomoću slova $p, q, r, \ldots$, koja označavaju iskaze, i simbola logičkih operacija koje smo naveli, nazivamo *iskaznim formulama*.

Iskaznu formulu nazivamo *tautologijom* ako prilikom bilo kakve zamjene svih njenih slova sa simbolima $\top$ ili $\bot$ formula prima vrijednost $\top$ poslije primjene svih logičkih operacija koje u njoj učestvuju.

Tautologije imaju veliki značaj u matematici. Naročito su značajne sljedeće dvije tautologije:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p), \tag{1.1}$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow (r \wedge \neg r)]. \tag{1.2}$$

Pokažimo pomoću tablica istinitosti da je prva formula tautologija:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Dakle, formula $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ je stvarno tautologija. Za implikaciju $\neg q \Rightarrow \neg p$ kažemo da je *kontrapozicija* implikacije $p \Rightarrow q$.

Drugu tautologiju dokažimo logičkim rasuđivanjem:

Ako je $p \Rightarrow q$ netačno, tada je p tačno, a q netačno, pa je $p \wedge \neg q$ tačno. Kako je $r \wedge \neg r$ uvijek netačno, to je tada $p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r$ netačno. Obrnuto, ako je $p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r$ netačno, tada mora biti $p \wedge \neg q$ tačno, tj. p tačno i q netačno, što znači da je $p \Rightarrow q$ netačno. Dakle, $p \Rightarrow q$ je netačno ako i samo ako je $(p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r)$ netačno, odakle, na osnovu definicije ekvivalencije, zaključujemo da je posmatrana formula tautologija.

Definicija 1.7 (intuitivna definicija predikata): Izreka ili formula, koja sadrži jedan ili više parametara i koja postaje iskaz (sud) ako svi ti parametri poprime određene vrijednosti, zove se predikat.

Ako je P neki predikat, tada je $(\forall x)P$ oznaka za novi predikat "Za svaki x je P". (Ako predikat P nema drugih parametara osim x, onda je $(\forall x)P$ tačan ili netačan iskaz.) Simbol $\forall$ zove se *kvantifikator generalizacije* ili *univerzalni kvantifikator*.

Ako je P neki predikat, tada je $(\exists x)P$ oznaka za novi predikat "Postoji takav x, da je P". (I ovdje, također, vrijedi da ako predikat P nema drugih parametara osim x onda je $(\exists x)P$ tačan ili netačan iskaz.) Simbol $\exists$ zove se *kvantifikator egzistencije*.

Zadaci (1.1—1.12)

1.1. Dokazati sljedeće osobine logičkih operacija:

a) $p \vee \neg p$ (zakon isključenja trećeg);

b) $\neg (p \wedge \neg p)$ (zakon neprotivrječnosti);

c) $\neg (\neg p) = p$[1] (zakon negacije negacije: negacija je involutivna);

d) $p \wedge q = q \wedge p$, $p \vee q = q \vee p$, $p \Leftrightarrow q = q \Leftrightarrow p$ (konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su komutativne);

e) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r = p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ (konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija su asocijativne);

f) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (konjunkcija je distributivna prema disjunkciji i obratno);

g) $p \wedge (p \vee q) = p$, $p \vee (p \wedge q) = p$ (konjunkcija je apsorptivna prema disjunkciji i obratno);

[1] Jednakost $p = q$ govori da iskazi p i q imaju istu vrijednost istinitosti.

h) $p \wedge \top = \top \wedge p = p$, $p \Leftrightarrow \top = \top \Leftrightarrow p = p$, $p \vee \bot = \bot \vee p = p$ ($\top$ je neutralni element za konjunkciju i ekvivalenciju, a $\bot$ za disjunkciju);
i) $p \vee \top = \top \vee p = \top$, $p \wedge \bot = \bot \wedge p = \bot$ ($\top$ je nula-element za disjunkciju, a $\bot$ za konjunkciju).

1.2. Dokazati da su sljedeće formule tautologije:
a) $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$, $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$ (De Morganovi zakoni)[1];
b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$;
c) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))]$;
d) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ — zakon modus ponens;
e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow (\neg p)$ — zakon modus tolens;
f) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ — zakon silogizma;
g) $p \Leftrightarrow [(\neg p) \Rightarrow (r \wedge (\neg r))]$.

1.3. Bez upotrebe istinitosnih tablica dokazati da su sljedeće iskazne formule tautologije:
a) $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$;
b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$;
c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$;
d) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$;
e) $[p \Rightarrow (q \wedge \neg q)] \Rightarrow \neg p$.

1.4. Riješiti po p, q i r u skupu $\{\top, \bot\}$ jednačinu:

$$(p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow r)) = \bot.$$

1.5. Odrediti sva rješenja jednačina po p i q:
a) $p \Rightarrow p \wedge q = \top$;
b) $p \vee q \Leftrightarrow p = \bot$;
c) $\neg p \Rightarrow (p \Leftrightarrow q) = \top$.

1.6. Neka simboli 1, 0, +, · znače isto što i $\top$, $\bot$, $\vee$, $\wedge$ respektivno. Izračunati:
a) $[(1 + 1) \cdot 0] + [(0 + 1) \cdot 1] + 1$;
b) $[(0 \cdot 0) \cdot 1] + [(0 + 0) \cdot 0]$.

1.7. Sljedeće formule iskazati riječima i ispitati da li su one tačne:
a) $(\forall\, x \in N)(\exists\, y \in N)\, y > x$;
b) $(\exists\, y \in N)(\forall\, x \in N)\, y > x$.
N je skup prirodnih brojeva.

1.8. Ispitati tačnost formula:
a) $(\forall\, x \in N)(\forall\, y \in N)(\exists\, z \in N)\, x + y = z$;
b) $(\forall\, x \in N)(\forall\, z \in N)(\exists\, y \in N)\, x + y = z$;
c) $(\forall\, x \in Z)(\forall\, z \in Z)(\exists\, y \in Z)\, x + y = z$.
Tu je N skup prirodnih brojeva, a Z skup cijelih brojeva.

1.9. Da li vrijede ekvivalencije:
a) $\neg(\forall\, x) P(x) \Leftrightarrow (\exists\, x) \neg P(x)$;
b) $\neg(\exists\, x) P(x) \Leftrightarrow (\forall\, x) \neg P(x)$;
c) $\neg(\forall\, x) \neg P(x) \Leftrightarrow (\exists\, x) P(x)$;
d) $\neg(\exists\, x) \neg P(x) \Leftrightarrow (\forall\, x) P(x)$.

[1] A. de Morgan (1806–1871) je engleski matematičar.

1.10.* a) Dokazati tvrdnju: svaka iskazna funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (tj. funkcija čiji argumenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ primaju vrijednosti iz skupa $\{\top, \bot\}$, a koja, također, prima vrijednosti iz tog skupa) potpuno je određena iskaznom formulom koja od logičkih simbola sadrži samo simbole $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

b) Primijeniti ono što je dokazano pod a) na iskaznu funkciju zadanu tablicom

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

tj. predstaviti funkciju f nekom iskaznom formulom.

1.11.* Odrediti iskaznu formulu koja predstavlja funkciju $f(x, y, z)$ čija je tablica istinitosti:

x	y	z	$f(x, y, z)$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

1.12.* Dokazati tvrdnju: svaka iskazna funkcija može se predstaviti iskaznom formulom koja sadrži samo par logičkih simbola $\neg$ i $\vee$, ili samo par logičkih simbola $\neg$ i $\wedge$, ili samo par logičkih simbola $\neg$ i $\Rightarrow$. Specijalno, svaka iskazna formula može se predstaviti njoj ekvivalentnom formulom koja sadrži samo jedan od navedena tri para logičkih simbola.

2. O SKUPOVIMA

Pretpostavlja se da su čitaocu poznati osnovni pojmovi u vezi sa skupovima. Posmatramo li neke međusobno različite objekte kao cjelinu, kažemo da oni čine skup, a za same objekte kažemo da su elementi skupa.

Definicija 2.1 (definicija podskupa). Za skup A kažemo da je *podskup* skupa B, i pišemo $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, tj.

$$A \subseteq B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Definicija 2.2 (definicija jednakosti skupova). Za skup A kažemo da je jednak skupu B ako je svaki element skupa A ujedno element skupa B i obrnuto, ako je svaki element skupa B također element skupa A, tj.

$$A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Vidi se da iz dvije prethodne definicije slijedi formula

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$, kažemo da je A *pravi podskup* skupa B i pišemo

$$A \subset B.$$

Definicija 2.3 (definicija praznog skupa). Skup $\emptyset$ za koji vrijedi

$$(\forall x)\, x \notin \emptyset,$$

zovemo *prazan skup*. To je, dakle, skup koji ne sadrži nijedan element.

Definicija 2.4 (definicija presjeka skupova). Pod *presjekom* skupa A sa skupom B podrazumijevamo skup $A \cap B$ svih zajedničkih elemenata skupova A i B, tj.

$$A \cap B \overset{\text{def.}}{=} \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definicija 2.5 (definicija unije skupova). Pod *unijom* skupa A sa skupom B podrazumijevamo skup $A \cup B$ svih elemenata koji pripadaju bar jednom od skupova A i B, tj.

$$A \cup B \overset{\text{def.}}{=} \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Definicija 2.6 (definicija razlike skupova). Skup svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B zovemo *razlika* skupa A i skupa B, i označavamo ga sa $A \setminus B$. Prema tome,

$$A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Ako je $A \subseteq B$, skup

$$C_B(A) = \{x \in B : x \notin A\}$$

se naziva *komplement* skupa A u odnosu na skup B.
Skup $\mathcal{P}(S)$ svih podskupova skupa S zovemo *partitivni* skup skupa S.
Kod *uređenog para* (x, y) kažemo da je x prva, a y druga komponenta toga para. Za dva uređena para (x, y) i (u, v) kažemo da su jednaka ako i samo ako su im jednake i prve i druge komponente, tj.

$$(x, y) = (u, v) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (x = u \wedge y = v).$$

Prema tome, uređeni par (x, y) treba razlikovati od skupa $\{x, y\}$, jer je $\{x, y\} = \{y, x\}$, a, u općem slučaju, $(x, y) \neq (y, x)$.

Definicija 2.7 (definicija Dekartovog proizvoda skupova). Pod *Dekartovim* (ili *direktnim*) *proizvodom* skupa A sa skupom B podrazumijevamo skup $A \times B$ svih uređenih parova čija je prva komponenta iz skupa A, a druga iz skupa B, tj.

$$A \times B \stackrel{\text{def.}}{=} \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Navešćemo dva riješena primjera operacija sa skupovima.

Primjer 2.1. Dokazati da za proizvoljne skupove A, B i C vrijedi jednakost:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Rješenje. Dokazaćemo da vrijedi

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

odakle će, na osnovu definicije 2.2, slijediti navedena tvrdnja. Imamo:

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \cup C) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Primjer 2.2. Ispitati da li je tačna implikacija

$$A = B \cup C \Rightarrow A \setminus B = C.$$

Rješenje. Data tvrdnja se može pisati u obliku

$$(x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup C) \Rightarrow (x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in C),$$

odnosno u obliku

$$[x \in A \Leftrightarrow (x \in B \vee x \in C)] \Rightarrow [(x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in C]. \tag{1}$$

Označimo tvrdnje $x \in A$, $x \in B$ i $x \in C$, redom, sa p, q i r. Stavimo li ove oznake u formulu (1), dobijemo sljedeću iskazanu formulu:

$$[p \Leftrightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow r]. \tag{2}$$

Toj formuli odgovara sljedeća tablica istinitosti:

p	q	r	$q \vee r$	$p \Leftrightarrow (q \vee r)$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow r$	$[p \Leftrightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow r]$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

Iz tablice vidimo da formula (2) nije tautologija, pa posmatrana implikacija nije tačna.

Napomena. I primjer 2.1. se mogao riješiti na ovaj način. Tu bi se pokazalo da je odgovarajuća iskazna formula

$$[p \wedge \neg (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \wedge (p \wedge \neg r)]$$

tautologija, što znači da je posmatrana jednakost tačna.

Zadaci (2.1 – 2.37)

2.1. Skup A svih prirodnih brojeva manjih od 50 koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 3 predstaviti: a) ispisivanjem njegovih elemenata), b) navođenjem zajedničkog svojstva njegovih elemenata.

2.2. Dati su skupovi

$$\text{a) } A = \{1, 1, 1, 1\},\ B = \{1\}; \qquad \text{b) } C = \{1, 2, 2\},\ D = \{1, 2\}.$$

Dokazati da vrijede jednakosti $A = B$ i $C = D$, koristeći se definicijom jednakosti skupova.

2.3. Da li su skupovi $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$ jednaki? Da li se oni razlikuju od skupa $\{\{\emptyset\}\}$? Koliko se na ovaj način može definisati skupova?

2.4. Sljedeće skupove predstaviti u obliku unije dva neprazna skupa:

$$\text{a) } \{x, y\}; \qquad \text{b) } \{\emptyset, \{x, y\}\}.$$

2.5. Odrediti uniju skupova X i Y ako je

$$X = \{x : x - 2 = -2 \wedge x \in R\}, \qquad Y = \{x : x^3 \neq x^3 \wedge x \in R\},$$

gdje je R skup realnih brojeva.

2.6. Dati su skupovi

$$A = \{x \in N : x = 2n, n \in N\} \text{ i } B = \{x \in N : x = 3n, n \in N\},$$

a treba naći skup $A \cap B$.

2.7. Dati su skupovi

$$A = \{x \in R : x \cdot \sqrt[4]{x - 2} \in R\} \text{ i } B = \{x \in R : |x + 4| < 8 \wedge |x - 2| < 4\},$$

gdje je R skup realnih brojeva. Odrediti skup $A \cap B$. (Napominjemo da se uzima u obzir i slučaj kada sam broj $\sqrt[4]{x - 2}$, za neko $x \in R$, predstavlja imaginaran broj.)

2.8. Dati su skupovi:

a) $A = \{(x, y) \in R^2 : y \geqslant |x|\}$ i $B = \{(x, y) \in R^2 : y \geqslant x + 1\}$;
b) $A = \{(x, y) \in R^2 : y^2 - x^2 \leqslant 0\}$ i $B = \{(x, y) \in R^2 : -1 \leqslant x \leqslant 2\}$;
c) $A = \{(x, y) \in R^2 : y \geqslant x^2 - 1\}$ i $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leqslant 3\}$.

Odrediti: u slučaju a) skup $A \cup B$, u slučaju b) skup $A \cap B$, a u slučaju c) skup $A \setminus B$, zapisujući tražene skupove analitički pomoću predikata i predstavljajući ih grafički u koordinatnom sistemu Oxy.

2.9. Koristeći se definicijom implikacije, dokazati da je prazan skup podskup svakog skupa.

2.10. Dokazati sljedeće osobine operacija unije i presjeka skupova:

a) $A \cup B = B \cup A$;
b) $A \cap B = B \cap A$;
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2.11. Ako je $\overline{A}$ oznaka komplementa skupa A, dokazati sljedeće osobine komplementa skupa:

a) $\overline{\overline{A}} = A$; b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.12. Dokazati da vrijedi:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
b) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
f) $A \cup (B \setminus C) \supseteq (A \cup B) \setminus C$.

2.13. Dokazati da vrijede relacije:

a) $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$;
b) $(X \cap Y) \cap Z = (X \cap Z) \cap (Y \cap Z)$.

Koristeći se relacijama a) i b), dokazati da vrijedi

c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

2.14. Dokazati tačnost formula:

a) $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$;
b) $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subseteq \overline{A})$.

2.15. Dokazati da za proizvoljne skupove A, B i C važi relacija

$$[(A \cap B = A \cap C) \wedge (A \cup B = A \cup C)] \Rightarrow B = C.$$

2.16. Da li su tačne implikacije

a) $A \setminus B = C \Rightarrow A = B \cup C$;
b) $A = B \cup C \Rightarrow A \setminus B = C$?

2.17. Ispitati tačnost jednakosti:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;
b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;

2.18. Ako je $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ i $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, dokazati da vrijedi:

a) $\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$;

b) $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$;

c) $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$;

d) $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$.

2.19. Neka je $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bilo kakva familija skupova, tj. neka je svakom $\lambda \in \Lambda$ pridružen neki skup A_λ. Pod skupom $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ (čitati: presjek od A_λ po svim $\lambda \in \Lambda$) podrazumijevamo skup koji sadrži sve one i samo one elemente koji su elementi svakog od skupova A_λ. Drugim riječima,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{a : (\forall\, \lambda \in \Lambda)\, a \in A_\lambda\}.$$

Dokazati da vrijedi jednakost

$$B \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (B \cup A_\lambda).$$

2.20. Dokazati da vrijedi jednakost

$$B \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (B \cap A_\lambda),$$

gdje je

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \overset{\text{def.}}{=} \{a : (\exists\, \lambda \in \Lambda)\, a \in A_\lambda\}$$

(vidjeti prethodni zadatak).

2.21. Neka je $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ bilo kakva familija skupova (vidjeti dva prethodna zadatka). Dokazati da vrijedi:

a) $\overline{\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$;

b) $\overline{\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$.

2.22. Riješiti:

a) po X jednačinu $\{1,2\} \cup X = \{1,2,3\} \cap X$;

b) po X sistem jednačina

$$\{2,3,5\} \cap X = \{3,5\},$$
$$\{2,4,6\} \cup X = \{1,2,3,4,5,6\};$$

c) po X i Y sistem relacija

$$X \cup Y = \{1,2,3,4,5\},$$
$$X \cap Y = \{3,4,5\},$$
$$1 \notin X \setminus Y,$$
$$2 \notin Y \setminus X;$$

d) po X i Y sistem relacija

$$X \cup Y = \{1,2,3,4,5,6\},$$
$$X \cap Y = \{1,2,3,4\},$$
$$\{4,6\} \not\subseteq X,$$
$$\{5,6\} \not\subseteq Y \setminus X.$$

2.23.* U jednom prevodilačkom timu radi 30 prevodilaca. Među njima 13 govori ruski jezik, 12 francuski, a 17 engleski. Ruski i engleski govori 5 prevodilaca, ruski i francuski 5, a engleski i francuski također 5.

a) Koliko prevodilaca govori sva tri jezika?

b) Koliko prevodilaca govori samo ruski?

2.24. U razredu ima 35 učenika. Od njih 3 učenika uče samo ruski, 5 samo engleski, 4 samo njemački, 1 i engleski i njemački, 2 ruski i engleski, a nijedan od učenika ne uči sva tri jezika. Koliko učenika uči i njemački i ruski, ako svaki od učenika uči bar jedan od ta tri strana jezika?

2.25.* U razredu u kome ima 37 učenika, 15 učenika su članovi društva mladih matematičara, 14 učenika su članovi društva mladih fizičara i 11 članovi društva mladih hemičara. 7 učenika su članovi prvog i drugog društva, 6 učenika su članovi prvog i trećeg društva, 8 učenika su članovi drugog i trećeg društva, a 4 učenika su članovi sva tri društva. Koliko učenika pripada samo prvom, koliko samo drugom i koliko samo trećem društvu? Koliko učenika nije član nijednog od ta tri društva?

2.26. Odrediti partitivni skup sljedećih skupova:

a) $\emptyset$; b) $\{a\}$; c) $\{a,b\}$; d) $\{a,b,c\}$.

2.27. Naći skupove: a) $\mathscr{I}(\mathscr{I}(\emptyset)) = \mathscr{I}^2(\emptyset)$; b) $\mathscr{I}(\mathscr{I}^2(\emptyset)) = \mathscr{I}^3(\emptyset)$.

2.28. Dokazati da vrijede formule:

a) $\mathscr{I}(A \cap B) = \mathscr{I}(A) \cap \mathscr{I}(B)$; b) $\mathscr{I}(A) \cup \mathscr{I}(B) \subseteq \mathscr{I}(A \cup B)$.

2.29. Navesti primjer skupova A i B za koje vrijedi

$$\mathcal{I}(A) \cup \mathcal{I}(B) \subset \mathcal{I}(A \cup B).$$

2.30. Navesti primjere različitih skupova A i B tako da je

$$\mathcal{I}(A) \cup \mathcal{I}(B) = \mathcal{I}(A \cup B).$$

2.31. Odrediti skupove $A \times B$ i $B \times A$ ako je

$$A = \{1, 2, 3\}, \qquad B = \{c, d, e\}.$$

2.32. Prikazati u koordinatnom sistemu skup $A \times B$, ako je

$$A = \{x \in R : 1 \leqslant x \leqslant 3\} \quad \text{i} \quad B = \{x \in R : 1 \leqslant x \leqslant 2 \vee 3 \leqslant x \leqslant 5\}.$$

2.33. Dokazati da vrijede jednakosti:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
b) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;
c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
d) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;
e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
f) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

2.34. Dokazati da za bilo koje skupove A, B, C i D vrijedi:

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

2.35. a) Dokazati da za bilo koje skupove A, B, C i D vrijedi:

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D);$$

b) naći primjer gdje vrijedi znak stroge inkluzije $\subset$.

2.36. Formula

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D)$$

je tačna za proizvoljne skupove A, B, C i D. Dokazati.

2.37. Dokazati da za bilo koje skupove A i B vrijedi implikacija

$$(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow [(A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset].$$

3. O DEFINICIJAMA I AKSIOMIMA I O DOKAZIVANJU TEOREMA

U svakoj matematičkoj teoriji polazimo od nekih osnovnih pojmova, kao što su tačka, prava, skup, pripada i slično, za koje smatramo da im značenje poznajemo. Ostale matematičke pojmove definišemo, tj. određujemo im značenje pomoću osnovnih i ranije definisanih pojmova.

Bitan sadržaj svake matematičke teorije su tvrđenja, tj. stavovi te teorije. Stavovi su ili osnovni — *aksiome*, ili izvedeni (dokazani) — *teoreme*. Aksioma je stav čija se istinitost ne dokazuje već se pretpostavlja. Teorema je stav koji se dokazuje tako što se utvrđuje da je ona logička posljedica bilo nekih aksioma, bilo nekih ranije dokazanih teorema, pozivajući se, eventualno, na neke definicije.

S obzirom na način dokazivanja teorema, istaknimo sljedeće vrste dokaza:
progresivni ili *sintetički dokaz*,
regresivno-progresivni ili *analitičko-sintetički dokaz*,
indirektni dokaz,
dokaz matematičkom indukcijom.

3.1. PROGRESIVNI DOKAZ

Primjer 3.1. Dokažimo teoremu: ako je posljednja cifra a_0 prirodnog broja a jednaka 5, tada je broj a djeljiv sa 5.

Teoremu možemo kratko zapisati ovako:

$$\underbrace{a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + 5}_{p} \Rightarrow \underbrace{5 \mid a}_{q}.$$

Ovo je teorema *hipotetičkog* ili *implikacijskog* oblika u kojoj iskaz p zovemo *pretpostavka*, a iskaz q *zaključak*.

Dokaz:

$$p : a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_1 : a = 5\left[2(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1) + 1\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_2 : (a = 5 \cdot m,\ m \in N) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q : 5 \mid a.$$

U dokazu smo pošli od pretpostavke p i, preko lanca implikacija

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow q,$$

došli do zaključka q teoreme. Teorema je time dokazana. Za ovakav način dokazivanja (od p na q) kažemo da je progresivni ili sintetički dokaz.

Napomena 3.1. Kod teoreme $p \Rightarrow q$ za pretpostavku p kažemo da je *dovoljan uslov* za zaključak q (što znači ovo: čim je istinito p, mora biti istinito i q). Za zaključak q kažemo da je *potreban uslov* za p (što znači ovo: ako nije tačno q, tada nije tačno ni p). Zaista, kada broj a ne bi bio djeljiv sa 5, tada mu posljednja cifra nije 5, jer kada bi ona bila 5 tada bi, prema navedenom dokazu, broj a bio djeljiv sa 5.

Iskazi

p je dovoljan uslov za q,
q je potreban uslov za p,

su ekvivalentni. Prvi iskaz, naime, je teorema oblika

$$p \Rightarrow q,$$

a drugi iskaz (koji znači isto što i rečenica: ako nije q tada nije ni p) je *kontrapozicija*

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

teoreme $p \Rightarrow q$. Teorema i njena kontrapozicija su, međutim, ekvivalentne (vidjeti formulu 1.1).

Napomena 3.2. Uz teoremu $p \Rightarrow q$ mogu, ali ne moraju vrijediti

obrnuta teorema: $q \Rightarrow p$

i

suprotna teorema: $\neg p \Rightarrow \neg q$,

ali mora vrijediti kontrapozitivna teorema $\neg q \Rightarrow \neg p$. Tako, u primjeru 3.1. ne vrijedi obrnuta teorema:

ako je broj a djeljiv sa 5, tada mu je zadnja cifra 5

(jer može biti $a_0 = 0$), niti suprotna teorema:

ako zadnja cifra broja a nije 5, tada on nije djeljiv sa 5

(jer ako je $a_0 = 0$ on je djeljiv sa 5). Uostalom, suprotna implikacija $\neg p \Rightarrow \neg q$ je kontrapozicija obrnute implikacije $q \Rightarrow p$, a one su, prema formuli 1.1, ekvivalentne

3.2. REGRESIVNO-PROGRESIVNI DOKAZ

Primjer 3.2. Dokažimo teoremu: ako su rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ jednaka, tada je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ te jednačine jednaka 0, tj.

$$\underbrace{x_1 = x_2}_{p} \Rightarrow \underbrace{D = 0}_{q} \quad (x_1, x_2 \text{ su rješenja jednačine } ax^2 + bx + c = 0).$$

Dokaz. Pođimo od zaključka $q: D = 0$, i pošto je $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, imamo:

$$(1) \qquad \underbrace{D = 0}_{q} \Rightarrow \underbrace{x_{1,2} = \frac{-b}{2a}}_{q_1} \Rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}_{p}.$$

U dokazu smo pošli od zaključka q i, preko lanca implikacija

$$q \Rightarrow q_1 \Rightarrow p,$$

došli do pretpostavke p teoreme. Kažemo da je ovo regresivni ili analitički "dokaz", odnosno put. To nije dokaz naše teoreme, već obrnute teoreme $q \Rightarrow p$, a one, kako smo napomenuli, ne moraju biti ekvivalentne. Nakon analitičkog puta treba provjeriti da li vrijede sve obrnute implikacije u lancu $q \Rightarrow \ldots \Rightarrow p$. One u našem primjeru vrijede, pa tako imamo jedinstven regresivno-progresivni dokaz teoreme.

U primjeru 3.2. vrijedi teorema $p \Rightarrow q$ i obrnuta teorema $q \Rightarrow p$, pa ih možemo objediniti u jednu teoremu

$$p \Leftrightarrow q.$$

Ovo je teorema *ekvivalencijskog* oblika u kojoj je p i dovoljan i potreban uslov za q, a q je i dovoljan i potreban uslov za p. Ti su uslovi, dakle, ekvivalentni (istinitost jednog povlači istinitost drugog i obrnuto).

Korisnost regresivno-progresivnog dokaza je u tome što je, katkad, mnogo lakše uočiti regresivni put nego li odmah progresivni dokaz, kao što se vidi u sljedećem primjeru.

Primjer 3.3. Dokažimo da je za sve realne nenegativne brojeve a i b tačna formula

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Dokaz. U teoremi

$$\underbrace{(a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0)}_{p} \Rightarrow \underbrace{\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}}_{q}$$

pođimo od zaključka q, pa imamo sljedeći analitički put:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Ovdje nismo došli do pretpostavke p teoreme, već do jedne tačne formule $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, jer $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \in R$. Vrijede, međutim, i sve obrnute implikacije, pa tako imamo sintetički dokaz teoreme

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \; (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0).$$

Nije, međutim, lako uočiti da za sintetički dokaz posljednje teoreme treba poći upravo od formule $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, a veoma je lako uočiti regresivni put.

Pri dokazivanju teoreme implicitno je korišćena pretpostavka, jer samo uz uslove $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$ vrijede formule $a = (\sqrt{a})^2$, $b = (\sqrt{b})^2$ i $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Kod analitičko-sintetičkog dokaza mogu se, naravno, odmah provjeravati obrnute implikacije, pa ako sve one vrijede, imamo lanac ekvivalencija koji povezuje pretpostavku i zaključak. U tom slučaju potpuni zapis dokaza teoreme u ovom primjeru izgleda ovako:

$$[(a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0) \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0) \Rightarrow a + b \geqslant 2\sqrt{ab}] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0) \Rightarrow (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geqslant 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0) \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0].$$

3.3. INDIREKTNI DOKAZ

Primjer 3.4. Dokažimo da je kvadrat svakog realnog broja pozitivan ili 0. Ovu teoremu iskazanu u takozvanom *kategoričkom* obliku možemo napisati u implikacijskom (hipotetičkom) obliku:

$$\underbrace{x \in R}_{p} \Rightarrow \underbrace{x^2 \geqslant 0}_{q}.$$

Prvi način dokazivanja:

$$x \in R \Rightarrow (x \geqslant 0 \vee x \leqslant 0) \Rightarrow x \cdot x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 0.$$

Ovo je, očito, progresivni dokaz.

Drugi način dokazivanja. Pretpostavimo da zaključak q nije tačan; tada je $x^2 < 0$. Odatle bi, međutim, slijedilo da x nije realan broj, a to je protivno našoj pretpostavci $p: x \in R$. Pošto uzimamo da je pretpostavka teoreme tačna, ne može biti tačna njena negacija. Zato nije moguće da je $x^2 < 0$, pa je $x^2 \geqslant 0$. Time je naša teorema dokazana.

Uočimo da smo na drugi način teoremu

$$p \Rightarrow q: x \in R \Rightarrow x^2 \geqslant 0$$

dokazali na indirektan način time što smo dokazali njenu kontrapozitivnu teoremu

$$\neg q \Rightarrow \neg p: x^2 < 0 \Rightarrow x \notin R,$$

za koju znamo da joj je ekvivalentna. Zato kažemo da je ovo *indirektan* način dokazivanja. U vezi s tim, može se reći da je progresivni i regresivno-progresivni dokaz *direktan* dokaz.

Primjer 3.5. Dokažimo da se zbir $S(n)$ prvih n prirodnih brojeva može odrediti po formuli

$$S(n) = \frac{n}{2}(1 + n). \tag{1}$$

Dokaz. 1° Za $n = 1$ formula (1) je tačna, jer imamo:

$$S(1) = \frac{1}{2}(1 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

2° Pretpostavimo da je formula (1) tačna za $n = k \geqslant 1$, tj. da vrijedi:

$$S(k) = \frac{k}{2}(1 + k), \tag{2}$$

pa dokažimo da formula vrijedi i za $n = k + 1$, tj. da vrijedi:

$$S(k + 1) = \frac{k + 1}{2}[1 + (k + 1)] = \frac{k + 1}{2}(k + 2). \tag{3}$$

Imamo:

$$S(k + 1) = S(k) + (k + 1) \overset{(2)}{=} \frac{k}{2}(1 + k) + (k + 1) = \frac{k + 1}{2}(k + 2).$$

Znači, formula (1) tačna je i za $k + 1$, ako je tačna za $n = k$.

3° Na osnovu provjere 1° tačnosti formule (1) i na osnovu zaključka 2°, zaključujemo da formula (1) vrijedi za svaki prirodni broj n.

Za navedeni dokaz formule (1) kažemo da je to dokaz metodom *matematičke indukcije*. Tom metodom dokazujemo neke iskaze i formule $p(n)$ koje sadrže prirodni broj n i čiju istinitost treba dokazati za sve prirodne brojeve $n \geqslant k_0$. Metoda se sastoji u sljedećem:

1° Provjerimo da li je iskaz $p(n)$ tačan za početni prirodni broj $n = k_0$ (obično je $k_0 = 1$).

2° Pretpostavimo da je iskaz $p(n)$ tačan za proizvoljan prirodni broj $n = k \geqslant k_0$, tj. pretpostavimo da je iskaz $p(k)$ tačan. Sada nastojimo dokazati da iz te pretpostavke slijedi tačnost iskaza $p(n)$ za sljedeći prirodni broj $n = k + 1$, tj. da je iskaz $p(k + 1)$ tačan.

3° Ako provjerom ustanovimo da je iskaz $p(k_0)$ tačan i ako iz pretpostavke da je iskaz $p(k)$ tačan slijedi tačnost iskaza $p(k + 1)$, tada zaključujemo da je iskaz $p(n)$ tačan za sve prirodne brojeve $n \geqslant k_0$.

Metoda matematičke indukcije osniva se na sljedećoj osobini skupa N prirodnih brojeva, koja je poznata kao *princip matematičke indukcije*: Ako podskup M skupa N ima ova dva svojstva:

1. $k_0 \in M$ i

2. $(\forall k \geqslant k_0) k \in M \Rightarrow k + 1 \in M$,

tada M sadrži sve prirodne brojeve $n \geqslant k_0$.

Primjer 3.6. Dokažimo još da vrijedi takozvana Njutnova [1] *binomna formula*:

$$(1) \qquad (x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}x^n,$$

gdje su x i y proizvoljni realni brojevi, n je proizvoljan prirodni broj, a oznaka $\binom{n}{k}$ — čitaj "n nad k", $1 \leqslant k \leqslant n$, ima ovo značenje:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(k-1)]}{k!}.$$

Oznaka $k!$ — čitaj "k faktorijel" predstavlja proizvod prvih k prirodnih brojeva, tj.

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k.$$

Oznaka $\binom{n}{0}$ stoji umjesto broja 1, tj. $\binom{n}{0} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Dokaz. 1° Za $n = 1$ imamo:

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1 + \binom{1}{1}x^{1-1}y = x + y = x + y.$$

Formula (1) je, dakle, tačna za $n = 1$.

2 Pretpostavimo da je formula (1) tačna za proizvoljan prirodni broj $n = k \geqslant 1$, tj. da vrijedi:

$$(2) \qquad (x+y)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \ldots + \binom{k}{r}x^{k-r}y^r + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k.$$

[1] Isak Njuton (I. Newton) (1642 – 1727) je veliki engleski matematičar i fizičar.

Dokažimo da, uz ovu pretpostavku, formula (1) vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n = k + 1$. U tu svrhu pomnožimo jednakost (2) sa $x + y$, pa na lijevoj strani jednakosti dobijemo $(x + y)^{k+1}$, a na desnoj strani dobijemo:

$$\binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \ldots + \binom{k}{r}x^{(k+1)-r}y^r + \ldots +$$

$$\binom{k}{k-1}x^2 y^{k-1} + \binom{k}{k}xy^k + \binom{k}{0}x^k y + \ldots + \binom{k}{r-1}x^{(k+1)-r}y^r +$$

$$+ \binom{k}{r}x^{k-r}y^{r+1} + \ldots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1} =$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \left\{\left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]x^k y + \ldots + \left[\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1}\right]x^{(k+1)-r}y^r + \right.$$

(3)

$$\left. + \ldots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}\right\}.$$

a) Po definiciji je $\binom{n}{0} = 1$, pa je zato $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1$.

b) Lako se provjerava da je $\binom{n}{n} = 1$. pa je zato $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$.

c) Svi koeficijenti u vitičastoj zagradi $\{\}$ u izrazu (3) imaju oblik $\binom{k}{r} + \binom{k}{r-1}$, i pokazuje se da su oni jednaki $\binom{k+1}{r}$.

Ako sada ono što smo rekli u a), b) i c) uvažimo u izrazu (3), dobićemo desnu stranu jednakosti (1), i to za $n = k + 1$.

3° Pošto je formula (1) tačna za $n = 1$. i pošto iz pretpostavke da formula vrijedi za $n = k \geqslant 1$ slijedi da ona vrijedi i za $n = k + 1$, na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da Njutnova binomna formula vrijedi za svaki prirodni broj.

4. BINARNE RELACIJE

Definicija 4.1. Ako su A i B neprazni skupovi, tada za svaki podskup ϱ direktnog proizvoda $A \times B$ kažemo da je *binarna (dvojna) relacija* iz skupa A u skup B. Za taj podskup ϱ kažemo još da je *graf* relacije iz skupa A u skup B.

Ako je $A = B$, kažemo da je relacija data u skupu A. Ako par $(x, y) \in \varrho$, kažemo još da su x i y u relaciji ϱ, i pišemo, često, $x \varrho y$. Tako, na primjer, za relaciju $<$ (biti manji od) u skupu N prirodnih brojeva pišemo

$$(2, 6) \in <, \text{ ili } 2 < 6;$$
$$(5, 4) \notin <, \text{ ili } 5 \not< 4.$$

Definicija 4.2. Za binarnu relaciju ϱ datu u nepraznom skupu A kažemo da je *refleksivna* ako i samo ako je svaki element $x \in A$ u relaciji ϱ sa sobom, tj. ako vrijedi:

$$(\forall\, x \in A) x \varrho x.$$

Refleksivna relacija sadrži dijagonalu $D = \{(x, x) : x \in A\}$ kvadrata $A^2 = A \times A$ skupa A.

Definicija 4.3. Za binarnu relaciju ϱ datu u nepraznom skupu A kažemo da je *antirefleksivna* ako nijedan element $x \in A$ nije u relaciji ϱ sa sobom, tj. ako vrijedi:

$$(\forall\, x \in A)\ (x, x) \notin \varrho.$$

Relacija $\leqslant$ u skupu Z cijelih brojeva je refleksivna, a relacija $<$ je antirefleksivna.

Definicija 4.4. Za binarnu relaciju ϱ datu u nepraznom skupu A kažemo da je *simetrična* ako i samo ako ona uz par (x, y) sadrži i par (y, x), tj. ako vrijedi:

$$(\forall\, x, y \in A)\ (x \varrho y \Rightarrow y \varrho x).$$

Relacija $=$ u skupu R realnih brojeva je simetrična relacija.

Definicija 4.5. Za binarnu relaciju ϱ datu u nepraznom skupu A kažemo da je *tranzitivna* (*prelazna*) ako i samo ako ona uz parove (x, y) i (y, z) sadrži i par (x, z), što kratko pišemo ovako:

$$(\forall\, x, y, z \in A)\left[(x \varrho y \wedge y \varrho z) \Rightarrow x \varrho z\right].$$

Jesu li relacije $\parallel$ (biti paralelan sa) i $\perp$ (biti okomit na) u skupu S svih pravih ravni tranzitivne relacije?

Definicija 4.6. Za relaciju koja je istovremeno refleksivna, simetrična i tranzitivna, kažemo da je *relacija ekvivalencije*.

Svaka relacija ekvivalencije data u skupu A dijeli taj skup na *klase ekvivalencije* (to su neprazni i disjunktni podskupovi skupa A čija je unija jednaka A). Za skup $A/\sim$ svih klasa ekvivalencije relacije ekvivalencije $\sim$ kažemo da je *faktorski* ili *kvocijentni* skup skupa A po relaciji ekvivalencije $\sim$.

Definicija 4.7. Za binarnu relaciju ϱ datu u nepraznom skupu A kažemo da je *antisimetrična* ako ona ne sadrži par (y, x), ukoliko sadrži par (x, y), $x \neq y$, tj.

$$(\forall\, (x, y) \in A^2),\ [x \neq y \wedge (x, y) \in \varrho \Rightarrow (y, x) \notin \varrho].$$

Takva je, na primjer, relacija $<$ u skupu N.

Definicija 4.8. Za relaciju koja istovremeno ima osobinu refleksivnosti, antisimetričnosti i tranzitivnosti, kažemo da je *relacija uređaja* (*poretka*) i obično je označavamo sa $\leqslant$. Za relaciju koja je istovremeno antirefleksivna, antisimetrična i tranzitivna, kažemo da je relacija *strogog uređaja* i obično je označavamo sa $<$.

Definicija 4.9. Za relaciju uređaja datu u skupu A kažemo da je *relacija potpunog* ili *linearnog uređaja* skupa A ako vrijedi:

$$(\forall\, x, y \in A)\,(x = y \veebar x < y \veebar y < x),$$

pri čemu je $\veebar$ oznaka isključne disjunkcije. Ako relacija uređaja nema svojstvo potpunosti, kažemo da je *relacija djelimičnog* ili *parcijalnog uređaja*. Kod takve relacije postoje neuporedivi elementi.

Primjer 4.1. Pokažimo da je relacija $|$ (djeljivosti) u skupu N prirodnih brojeva relacija uređaja, i to djelimičnog.
Pođimo od definicije:

$$(\forall\, a, b \in N)\, b|a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists\, q \in N)\, a = bq$$

gdje $b|a$ znači da b dijeli a.

a) $a|a$ za svaki $a \in N$, jer vrijedi jednakost $a = a \cdot 1$, $1 \in N$. Znači, relacija $|$ ima osobinu refleksivnosti.

b) $(\forall\, a, b \in N)\,(b|a \wedge a \neq b) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists\, q > 1)\,(a = bq) \Rightarrow a > b \Rightarrow a \nmid b$. Relacija $|$ je, prema tome, antisimetrična.

c) $(\forall\, a, b, c \in N)\,(b|a \wedge c|b) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists\, q, r \in N)\,(a = bq \wedge b = cr) \Rightarrow a = (cr)q \Rightarrow$

$$\Rightarrow [a = c(rq) \wedge rq \in N] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} c|a.$$

Znači, relacija $|$ u skupu N je tranzitivna.

Time smo dokazali da je relacija $|$ uređajna relacija u skupu N. Ona je relacija djelimičnog uređaja jer postoje elementi koji su tom relacijom neuporedivi. Tako, na primjer, niti $2|3$, niti $3|2$.

Definicija 4.10. Ako je ϱ relacija iz skupa A u skup B, tada za relaciju ϱ^{-1} iz skupa B u skup A kažemo da je inverzna relaciji ϱ ako $(x, y) \in \varrho \Leftrightarrow (y, x) \in \varrho^{-1}$.

Definicija 4.11. Za skup A kažemo da je *dobro uređen* relacijom ϱ ako svaki njegov neprazni podskup ima početni (minimalni) element.

Tako je, na primjer, skup N dobro uređen relacijom $<$.

Zadaci (4.1—4.27)

4.1. Napisati sve binarne relacije u skupu $S = \{a, b\}$ izuzev onih koje sadrže više od dva para.

4.2. Dat je skup $S = \{1, 2\}$ i u partitivnom skupu $\mathcal{P}(S)$ skupa S relacija ϱ ovako:

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(S))(A \varrho B \Leftrightarrow A \subseteq B).$$

Ispisati graf relacije ϱ.

4.3. Relaciju $|$ djeljivosti iz skupa $A = \{1, 2, 3, 4\}$ u skup $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ prikazati: a) pomoću parova, b) pomoću Dekartovog dijagrama, c) pomoću strelastog dijagrama.

4.4. U skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ data je relacija

$$\varrho = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}.$$

Iskazati tu relaciju riječima i zapisati je simbolički.

4.5. Posmatrajmo u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ predikate

a) $x + y = 7$, b) $xy = 12$, c) $y = x^2$.

Ispisati grafove relacija određenih tim predikatima.

4.6. U pravouglom koordinatnom sistemu Oxy predstaviti sljedeće relacije:

a) $\varrho = \{(x, y) \in R \times R : -2 \leqslant x \leqslant 3\}$;

b) $\varrho = \{(x, y) \in R \times R : |y| \geqslant 1\}$.

4.7. Prikazati u koordinatnom sistemu Oxy relaciju

$$\varrho = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > 4\}.$$

4.8. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{a, b\}$ i relacija ϱ iz A u B:

$$\varrho = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}.$$

Treba napisati graf inverzne relacije ϱ^{-1}.

4.9. U skupu N prirodnih brojeva data je relacija:

a) $\varrho = \{(x, y) \in N \times N : x + 5y = 25\}$;

b) $\varrho = \{(x, y) \in N \times N : 3x + 3y = 7\}$;

c) $\varrho = \{(x, y) \in N \times N : x + 2y = 3\}$.

Ispisati grafove relacija ϱ i ϱ^{-1} i odrediti predikat kojim se može definisati inverzna relacija ϱ^{-1}.

4.10. Dat je skup $S = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ i u njemu je definisana relacija ϱ ovako:

$$x \varrho y \Leftrightarrow D(x, y) = 1,$$

gdje je D oznaka za najveći zajednički djelilac. Ispisati graf relacije ϱ i ispitati da li je ϱ refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.

4.11. U skupu N prirodnih brojeva data je relacija

$$\varrho = \{(x, y) \in N \times N : x + 2y = 10\}.$$

Da li je relacija ϱ refleksivna, antirefleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna?

4.12. Dat je neki neprazan skup S i u njegovom partitivnom skupu $\mathscr{P}(S)$ relacija ϱ definisana ovako:

$$(\forall A, B \in \mathscr{P}(S))\, A \varrho B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Ispitati da li ova relacija ima svojstva: a) refleksivnosti, b) antirefleksivnosti, c) simetričnosti, d) antisimetričnosti, e) tranzitivnosti.

4.13. Dokazati tvrdnju: da bi relacija ϱ u nekom skupu S bila simetrična, potrebno je i dovoljno da je

$$\varrho^{-1} = \varrho.$$

4.14. Dokazati tvrdnju: relacija ϱ je u nekom skupu S antisimetrična ako i samo ako je

$$\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq D,$$

gdje je D dijagonala Dekartovog proizvoda $S \times S$ (tj. $D = \{(x, x) : x \in S\}$).

4.15. Dokazati tvrdnju: ako je relacija ϱ u nekom skupu S tranzitivna, tada je i relacija ϱ^{-1} u tom skupu tranzitivna.

4.16. Dat je skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i u njemu relacija $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (1, 4), (5, 5), (6, 5), (6, 6)\}$. Da li je relacija ϱ: a) refleksivna, b) simetrična, c) tranzitivna, d) relacija ekvivalencije? Ako nije, dopuniti je minimalnim brojem uređenih parova tako da ona bude relacija ekvivalencije.

4.17. Dati su faktorski skupovi relacija ekvivalencije ϱ_1, ϱ_2 i ϱ_3 (tj. skupovi njihovih klasa ekvivalencije) koje su na skupu $S = \{a, b, c\}$ definisane ovako:

$$\text{a) } S/\varrho_1 = \{\{a, b\}, \{c\}\}; \qquad \text{b) } S/\varrho_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\};$$

$$\text{c) } S/\varrho_3 = \{\{a, b, c\}\}.$$

Treba odrediti relacije ϱ_1, ϱ_2 i ϱ_3.

4.18. U skupu Z cijelih brojeva definisana je relacija ϱ ovako:

$$x \varrho y \Leftrightarrow 2 \mid (x + y).$$

Treba dokazati da je ϱ relacija ekvivalencije.

4.19. U skupu N^2 uređenih parova prirodnih brojeva data je relacija ϱ ovako:

a) $(a, b) \varrho (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$;
b) $(a, b) \varrho (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Dokazati da je ϱ relacija ekvivalencije.

4.20. Dokazati da je relacija $\|$ ("biti paralelan sa") u skupu S svih pravih ravni relacija ekvivalencije.

4.21. U skupu $S = \{a, b, c\}$ odrediti binarnu relaciju ϱ za koju vrijedi:

a) relacija ϱ je refleksivna i simetrična, a nije tranzitivna;

b) relacija ϱ je refleksivna i tranzitivna, a nije simetrična;

c) relacija ϱ je simetrična i tranzitivna, a nije refleksivna.

Zaključiti, na osnovu a), b) i c), da nijedna od te tri osobine nije logička posljedica preostale dvije osobine.

4.22. U skupu $S = \{a, b, c\}$ definisana je relacija ϱ ovako:

$$\varrho = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (a, c), (b, c), (c, a), (c, c)\}.$$

Dokazati da je ta relacija refleksivna i tranzitivna, a nije antisimetrična. Isključiti minimalan broj elemenata te relacije tako da ona bude relacija uređaja.

4.23. Neka je S neprazan skup, a $\mathcal{P}(S)$ njegov partitivni skup. U skupu $\mathcal{P}(S)$ definisana je relacija ϱ na sljedeći način:

$$(\forall\, A, B \in \mathcal{P}(S))\ A \varrho B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Dokazati da je relacija ϱ relacija uređaja, ali ne i potpunog uređaja u slučaju da S ima bar dva elementa.

4.24. U skupu N prirodnih brojeva definisana je relacija djeljivosti:

$$x \mid y \Leftrightarrow (\exists\, k \in N)\, y = kx.$$

Treba dokazati da je $\mid$ relacija uređaja, ali ne i potpunog uređaja.

4.25. Podskup A parcijalno uređenog skupa S naziva se *lancem* ako je on sam potpuno uređen u odnosu na relaciju ϱ parcijalnog uređaja u skupu S. Za lanac kažemo da je *maksimalan* ako on nije sadržan u nekom većem lancu, tj. ako nije pravi podskup nekog drugog lanca. Naći sve maksimalne lance u skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u kome je data relacija parcijalnog uređaja

$$\varrho = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}.$$

Poslužiti se, pri tom, sljedećom grafičkom predstavom relacije ϱ:

$$\begin{matrix} 1 \searrow \\ 2 \nearrow \end{matrix} 3 \to 4 \qquad 5 \to 6.$$

4.26. Dokazati tvrdnju: ako je relacija ϱ antirefleksivna i tranzitivna, tada je ona antisimetrična.

4.27. Dokazati ekvivalentnost sljedeća dva uslova antisimetričnosti za neku relaciju ϱ u nekom skupu S:

(1) $\quad (x \varrho y \wedge y \varrho x) \Rightarrow x = y,$

(2) $\quad (x \varrho y \wedge x \neq y) \Rightarrow y \not\varrho x.$

5. OSNOVNI POJMOVI KOD FUNKCIJA. EKVIPOTENTNI SKUPOVI

5.1. OSNOVNI POJMOVI KOD FUNKCIJA

Definicija 5.1. Ako su A i B neprazni skupovi i ako *svakom* elementu $x \in A$ odgovara, po nekom pravilu, *jedan i samo jedan* element $y \in B$, kažemo da je data *funkcija* ili *preslikavanje* f sa skupa A u skup B, i pišemo

$$f: A \to B.$$

Za element $x \in A$ kažemo da je *argumem* ili *original* funkcije f, a njemu pridruženi element $y \in B$, koji označavamo sa $f(x)$, je *vrijednost* funkcije f za element x, ili *slika* elementa x u odnosu na f.

Proizvoljni element $x \in A$ zove se *nezavisna promjenljiva* (*varijabla*) funkcije f, a njegova slika $y \in B$ u odnosu na f *zavisno promjenljiva* (*varijabla*).

Vidi se da je funkcija f sa A u B specijalna relacija, sa osobinama:

a) svaki element $x \in A$ je prva komponenta nekog para $(x, y) \in f$;

b) funkcija ne sadrži parove oblika (x_1, y_1) i (x_1, y_2), $y_1 \neq y_2$.

Za skup A kažemo da je *definiciono područje* ili *domena* funkcije f, a za skup B kažemo da je *područje mogućih vrijednosti* ili *kodomena* funkcije f.

Za funkciju

$$f: A \to B,\ A \subseteq R,\ B \subseteq R,$$

gdje je R skup svih realnih brojeva, kažemo da je *realna funkcija* jedne realne varijable.

Za skup

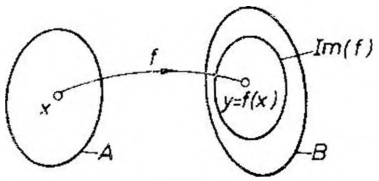
$$D(f) = \{x \in R \mid f(x) \in R\}$$

kažemo da je *prirodna domena* funkcije f koja je zadana formulom. Ako se ništa ne istakne, podrazumijeva se da je domena funkcije f zadane formulom prirodna domena $D(f)$.

Za skup

$$I_m(f) = \{f(x) \mid x \in A\},$$

koji se označava i sa $f(A)$, kažemo da je skup *svih vrijednosti* ili *slika* funkcije f i jasno je da je $I_m(f) \subseteq B$ (sl. 5.1). Umjesto $I_m(f)$ koristi se i oznaka Ran f.



Sl. 5.1.

Definicija 5.2. Ako je $I_m(f) = B$, kažemo da je funkcija f *sirjektivna* ili da je funkcija *na* (tj. funkcija sa skupa A na skup B). Da je funkcija $f: A \to B$ sirjektivna, pišemo kratko

$$(\forall\, y \in B)(\exists\, x \in A)\, y = f(x).$$

Definicija 5.3. Za funkciju $f: A \to B$ kažemo da je *injektivna* ako različitim vrijednostima argumenta x odgovaraju različite vrijednosti funkcije, tj. ako vrijedi:

$$(\forall\, x_1, x_2 \in A)\, [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Ovoj osobini ekvivalentna je kontrapozitivna osobina:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

koja je često pogodnija pri ispitivanju osobine injektivnosti funkcije.

Definicija 5.4. Ako je funkcija $f: A \to B$ istovremeno injektivna i sirjektivna, kažemo da je *obostrano-jednoznačna* ili *bijektivna*, što označavamo sa

$$f: A \xrightarrow{1-1} B.$$

Ako je $A = B$, kažemo da je funkcija f data na skupu A, a ako je ta funkcija bijektivna, kažemo da je ona *permutacija* skupa A.

Primjer 5.1. Date su realne funkcije formulama

$$\text{a) } f(x) = x^2; \qquad \text{b) } f(x) = \sqrt{x}.$$

Odrediti njihove domene i skupove vrijednosti, i ispitati da li su funkcije $f: D(f) \to I_m(f)$ bijektivne.

Rješenje. a) $D(f) = R$, jer vrijedi:

$$(\forall\, x \in R)\, x^2 \in R.$$

Označimo li $R^* = R^+ \cup \{0\}$, gdje je R^+ skup pozitivnih realnih brojeva, tada je $I_m(f) = R^*$, jer vrijedi:

$$(\forall\, y \in R^*)(\exists\, x \in R)\, f(x) = y.$$

Pošto je

$$f(x) = x^2 \text{ i}$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

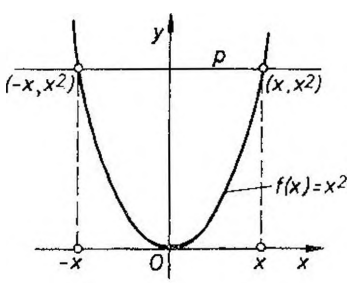
funkcija nije injektivna. Znači, funkcija

$$f: R \to R^*,\ f(x) = x^2$$

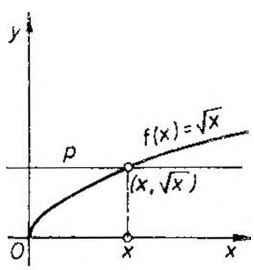
nije bijektivna (sl. 5.2).

b) $D(f) = R^*$, jer vrijedi:

$$(\forall\, x \geqslant 0)(\exists\, !\sqrt{x} \in R).$$



Sl. 5.2.



Sl. 5.3.

Nadalje, imamo: $I_m(f) = R^*$, jer vrijedi:

$$(\forall\, y \in R^*)(\exists\, x \in R^*)\, y = \sqrt{x}.$$

Ovdje je $\sqrt{x} \geqslant 0$ takozvana aritmetička vrijednost korijena.
Pošto vrijedi:

$$(\forall\, x_1, x_2 \in R^*)\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2},$$

funkcija je injektivna. Pošto je funkcija

$$f: R^* \to R^*,\ f(x) = \sqrt{x}$$

sirjektivna i injektivna, ona je bijektivna (sl. 5.3).

Napomena 5.1. Nijedna prava p paralelna osi x ne može sjeći grafik bijektivne funkcije u više od jedne tačke (sl. 5.3). Kod realne funkcije koja nije injekcija, naprotiv, postoje prave paralelne osi x koje njen grafik sijeku u više nego u jednoj tački (sl. 5.2).

Definicija 5.5. Za funkciju f datu na skupu A kažemo da je *identička* funkcija i označavamo je sa i_A ako vrijedi:

$$(\forall\, x \in A)\, f(x) = x.$$

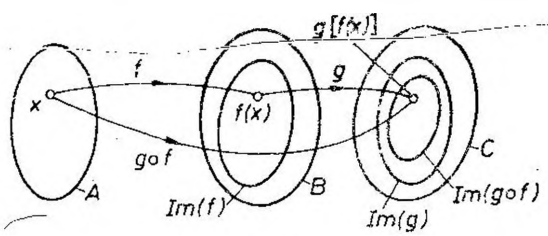
Definicija 5.6. Ako su date funkcije $f: A \to B$ i $g: B \to C$, tada pod *slogom* ili *kompozicijom* $g \circ f$ (čitaj "g kružić f" ili "g puta f") funkcije f sa funkcijom g podrazumijevamo funkciju

$$(g \circ f): A \to C,\ (g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g[f(x)],\ x \in A.$$

Složena funkcija $(g \circ f): A \to C$ postoji ako je skup vrijednosti $I_m(f)$ funkcije f podskup domene funkcije g, tj. ako je

$$I_m(f) \subseteq D(g),$$

što je pokazano na slici 5.4.



Sl. 5.4.

Pokazuje se da je kompozicija bijektivnih funkcija bijektivna funkcija (vidjeti zadatak 5.14).

Kompozicija tri funkcije definiše se ovako:

$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f),$$

i slično kompozicija 4 i više funkcija.

Napomena 5.2. Pokazuje se da je operacija $\circ$ slaganja funkcija asocijativna, a nije komutativna[1] (vidjeti zadatak 5.13).

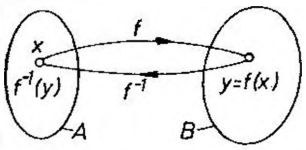
Definicija 5.7. Ako je funkcija $f: A \to B$ bijektivna, tada postoji *inverzna funkcija*

$$f^{-1}: B \to A,\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)\ (x \in A, y \in B)$$

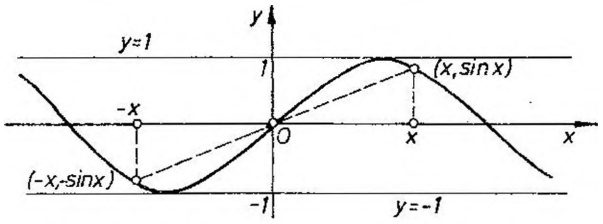
(sl. 5.5). Inverzna funkcija je također bijektivna.

[1] tj. da je za sve funkcije f, g i h nekog skupa S funkcija $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, a nije $g \circ f = f \circ g$.

Definicija 5.8. Za funkciju $f: A \to B$ kažemo da je jednaka funkciji $f': A' \to B'$ ako i samo ako je $A = A'$, $B = B'$ i ako je, za svaki element $x \in A$, $f(x) = f'(x)$.



Sl. 5.5.



Sl. 5.6.

Definicija 5.9. Za funkciju f čija je domena $D(f) \subseteq R$ simetrična prema tački 0, tj. za svaki $x \in D(f)$ također $-x \in D(f)$, kažemo da je *parna*, odnosno *neparna*, ako za svaki $x \in D(f)$ vrijedi:

$$f(-x) = f(x), \text{ odnosno } f(-x) = -f(x).$$

Tako je funkcija

$$f: R \to R,\ f(x) = x^2$$

parna, jer vrijedi:

$$(\forall\, x \in D(f)) - x \in D(f) \text{ i } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Grafik parne funkcije simetričan je prema osi y (sl. 5.2), jer on uz tačku $(x, f(x))$ uvijek sadrži i tačku $(-x, f(x))$.

Funkcija

$$f: R \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$$

je neparna, jer joj je domena simetrična u odnosu na tačku 0 i jer vrijedi:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x).$$

Grafik neparne funkcije centralno je simetričan prema ishodištu 0(0,0) koordinatnog sistema (sl. 5.6), jer on uz tačku $(x, f(x))$ uvijek sadrži i tačku $(-x, -f(x))$.

Zadaci (5.1—5.33)

5.1. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$ i relacije iz skupa A u skup B:

$$\varrho_1 = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a), (4, b)\},$$
$$\varrho_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\},$$
$$\varrho_3 = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}.$$

Koje od ovih relacija su funkcije iz skupa A u skup B?

5.2. Koja od relacija

$$f = \{(x, x^2) : x \in R\}, \qquad g = \{(x^2, x) : x \in R\}$$

nije funkcija?

5.3. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ i $C = \{m, n, p\}$ i funkcije

$f_1: A \to B$, $f_1 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$,
$f_2: A \to B$, $f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$,
$f_3: B \to C$, $f_3 = \{(a, m), (b, n), (c, p), (d, p)\}$,
$f_4: C \to A$, $f_4 = \{(m, 1), (n, 2), (p, 3)\}$.

Ispitati za ove funkcije osobine injektivnosti, sirjektivnosti i bijektivnosti.

5.4. Date su funkcije

$$f: N \to N,\ f(n) = n + 1,$$
$$g: R \to R,\ g(x) = x + 1.$$

Da li su ove funkcije sirjektivne?

5.5. Jesu li funkcije

$$f: N \to N,\ f(x) = 2x^2 + 1,$$
$$g: R \to R,\ g(x) = 2x^2 + 1$$

injektivne?

5.6. Naći jednu funkciju $f: N \to N \cup \{0\}$ koja nije injektivna.

5.7. Je li funkcija

$$f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x + 1, x < 0 \\ 1 - 2x, x \geqslant 0: \end{cases}$$

a) injektivna, b) sirjektivna?

5.8. Dat je izraz

$$f(x) = \frac{(m + x)^{\frac{1}{2}} + (m - x)^{\frac{1}{2}}}{(m + x)^{\frac{1}{2}} - (m - x)^{\frac{1}{2}}},\ m > 0.$$

a) Odrediti parametar n tako da $\frac{2mn}{n^2 + 1}$ pripada definicionom području izraza $f(x)$;

b) zatim izračunati vrijednost $f\left(\frac{2mn}{n^2 + 1}\right)$.

5.9. Dokazati da vrijednost $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, $a > 0$ pripada domeni funkcije date formulom

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

i naći vrijednost funkcije za datu vrijednost x.

5.10. Jesu li jednake realne funkcije f i g koje su date formulama

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}, \quad g(x) = x + 4?$$

5.11. Naći $f(x)$ ako se zna da za funkciju $f: R \to R$ vrijedi jednakost $f(2x - 3) = 4x + 2$ za svako $x \in R$.

5.12. Data je realna funkcija f formulom

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{x}, \quad x > 0.$$

a) Odrediti $f(x)$;

b) nacrtati grafike funkcija $y = f(x)$ i $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

5.13. Neka postoje funkcije

$f: S \to S_1$, $g: S_1 \to S_2$ i $h: S_2 \to S_3$.

Dokazati da je

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

tj. da je operacija $\circ$ slaganja funkcija asocijativna.

5.14. Neka su date funkcije

$$f: A \to B \text{ i } g: B \to C.$$

Dokazati da vrijedi:

a) ako su funkcije f i g injektivne, tada je i funkcija $g \circ f$ injektivna;

b) ako su funkcije f i g sirjektivne, tada je i funkcija $g \circ f$ sirjektivna;

c) ako su funkcije f i g bijektivne, tada je i funkcija $g \circ f$ bijektivna.

5.15. Date su funkcije

$$f: R \to R, \ f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1 \\ 2x - 2, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3x - 4, & x > 2, \end{cases}$$

$$g: R \to R, \ g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Naći funkciju $g \circ f$ ako postoji.

5.16. Zadane su realne funkcije formulama

$$f(x) = 3x - 2 \text{ i } g(x) = ax + 3.$$

Koliki mora biti koeficijent a da bi izrazi $f(g(x))$ i $g(f(x))$ bili jednaki za sve vrijednosti $x \in R$?

5.17. Data je funkcija

$$f: R \to R, \quad f(x) = 2x + 3.$$

Dokazati da postoji inverzna funkcija f^{-1}, odrediti njenu formulu i prikazati je grafički.

5.18. Dokazati da je funkcija

$$f: R \to R, \quad f(x) = x^3 - 2$$

bijektivna i naći njenu inverznu funkciju.

5.19. Dokazati da je funkcija

$$f: R \setminus \{3\} \to R \setminus \{-1\}, \quad f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

bijektivna i naći njenu inverznu funkciju.

5.20. Data je funkcija

$$f: R \times R \to R \times R, \quad f: (x, y) \mapsto (2x + y - 3,\ x + y + 1).$$

Dokazati da je ona bijektivna, i odrediti njenu inverznu funkciju.

5.21. Odrediti formulu i nacrtati grafik funkcije f^{-1}, ako je data funkcija

$$f: R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}, \quad f(x) = x^2.$$

5.22. Data je realna funkcija formulom $f(x) = x^2 - 4$.

a) Odrediti skup $I_m(f)$ svih njenih vrijednosti i nacrtati njen grafik k.

b) Nacrtati krivu $k_1 = s_p(k)$, gdje je s_p osno simetrično preslikavanje ravni prema pravoj p: $y = x$. Da li krivoj k_1 odgovara neka funkcija?

c) Odrediti najveći dio krive k kome odgovara funkcija za koju postoji inverzna funkcija, pa odrediti formulu inverzne funkcije.

5.23. Realne funkcije određene su sljedećim formulama:

a) $f_1(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, b) $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2}$,

c) $f_3(x) = \dfrac{x - x^3}{1 + x^2}$, d) $f_4(x) = 2x^2 - 3x + 2$.

Koje između njih su parne, koje neparne, a koje nisu ni parne ni neparne?

5.24. Posmatrajmo u skupu R realnih brojeva formule:

a) $f(x) = |x|$[1]; b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, c) $f(x) = |x^2 - 4|$.

Odrediti domenu $D(f)$, skup vrijednosti $I_m(f)$, ispitati bijektivnost i parnost, uz grafičku predstavu, i izraziti kompoziciju $f \circ f$ pomoću f.

---

[1] Podsjetimo se da, po definiciji apsolutne vrijednosti, važi:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

5.25. Date su realne funkcije formulama:

$$\text{a) } f(x) = x; \qquad \text{b) } f(x) = x^3; \qquad \text{c) } f(x) = x^{-1}.$$

Odrediti skupove $D(f)$, $I_m(f)$, ispitati parnost i odrediti formule inverznih funkcija (ako postoje), uz grafičku predstavu.

5.26. Riješiti prethodni zadatak za funkcije date formulama:

$$\text{a) } f(x) = \sin x; \qquad \text{b) } f(x) = |\sin x|;$$
$$\text{c) } f(x) = \sin^2 x; \qquad \text{d) } f(x) = |\sin x| + 2.$$

5.27. Realna funkcija f je data formulom

$$f(x) = \frac{x-2}{2x+1},$$

a treba naći $f(A)$ i $f^{-1}(A)$, gdje je $A = [1, 2]$.

5.28. Dat je skup $A = [-1, 1]$ i funkcija f formulom

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}.$$

Dokazati da funkcija f preslikava skup A bijektivno na taj isti skup.

5.29. Neka su dati skupovi E i F i preslikavanje $f: E \to F$. Ako je $A \subseteq E$ i $B \subseteq E$, dokazati da vrijedi:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
c) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$.

Na primjerima pokazati da u b) i c) ne mora vrijediti znak $=$.

5.30. Dokazati da u prethodnom zadatku vrijedi:

$$\text{a) } f^{-1}(f(A)) \supseteq A; \qquad \text{b) } f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

5.31.* Dokazati: a) Funkcija $f: E \to F$ je injektivna ako i samo ako postoji bar jedna funkcija $g: F \to E$ takva da je

$$g \circ f = i_E$$

(i_E je identičko preslikavanje skupa E).
b) Funkcija $f: E \to F$ je sirjektivna ako i samo ako postoji bar jedna funkcija $g: F \to E$ takva da je

$$f \circ g = i_F.$$

5.32. Neka je $f: E \to F$ bijektivna funkcija. Dokazati da je potreban i dovoljan uslov da funkcija $g: F \to E$ bude inverzna funkcija od f dat relacijama

$$f \circ g = i_F \quad \text{i} \quad g \circ f = i_E.$$

5.33. Dokazati da za bijektivne funkcije $f: E \to F$ i $g: F \to G$ vrijedi jednakost

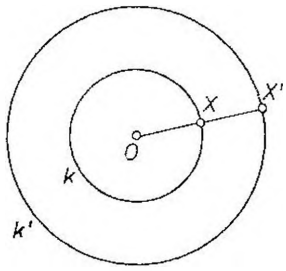
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

5.2. EKVIPOTENTNI SKUPOVI

Definicija 5.10. Za skup A kažemo da je *ekvipotentan* skupu B i pišemo $A \sim B$, ako i samo ako postoji bar jedno bijektivno preslikavanje sa skupa A na skup B. To kratko pišemo

$$A \sim B \Leftrightarrow (\exists f) f: A \overset{1-1}{\to} B.$$

Primjer 5.2. Dokažimo da su svake dvije koncentrične kružnice ekvipotentni skupovi tačaka.



Sl. 5.7.

Dokaz. Neka su na slici 5.7. date koncentrične kružnice $k(O, r)$ i $k'(O, r')$. Jasno je da preslikavanje homotetije h središta O i koeficijenta $k = \frac{r'}{r}$ preslikava kružnicu k na kružnicu k'. Pošto je homotetija bijekcija ravni, kružnica k je ekvipotentan skup tačaka kružnici k'.

Definicija 5.11. Za skup kažemo da je *beskonačan* ako i samo ako je ekvipotentan bar jednom svom pravom podskupu. U protivnom, za skup kažemo da je *konačan*.

Zadaci (5.34—5.43)

5.34. Dokazati da je relacija ekvipotentnosti skupova na svakoj nepraznoj familiji skupova relacija ekvivalencije.

5.35. Dokazati da je skup N prirodnih brojeva beskonačan skup.

5.36. Dokazati da je skup prirodnih brojeva ekvipotentan skupu cijelih brojeva.

5.37. Skup N prirodnih brojeva ekvipotentan je skupu $N^2 = N \times N$. Dokazati.

5.38. Dokazati da je skup N prirodnih brojeva ekvipotentan skupu Q racionalnih brojeva.

5.39. Skup R realnih brojeva ekvipotentan je skupu R^+ pozitivnih realnih brojeva. Dokazati.

5.40. Svake dvije nenulte duži u ravni su ekvipotentni skupovi tačaka. Dokazati.

5.41. Dokazati da je svaka nenulta duž beskonačan skup tačaka.

5.42. Obrazložiti zašto su ekvipotentni sljedeći skupovi tačaka:

a) kružnica i oko nje opisana trougaona linija;
b) proizvoljni luk kružnice i njemu komplementni luk.

5.43.* Dokazati da je skup R realnih brojeva ekvipotentan intervalu $(0,1)$.

6. O ALGEBARSKIM STRUKTURAMA

Definicija 6.1. Ako je A neprazan skup, tada za svaku funkciju $\circ$ (čitaj "kružić") sa skupa $A \times A$ u skup A kažemo da je *binarna algebarska operacija* na skupu A. Ako je na skupu A data algebarska operacija $\circ$, kažemo da je skup A *zatvoren* u odnosu na tu operaciju. Za operaciju $\circ$ i elemente $x, y \in A$, umjesto $\circ(x, y)$, pišemo $x \circ y$. Zatvorenost skupa A u odnosu na operaciju $\circ$ znači da za svaka dva elementa x i y iz skupa A rezultat operacije $x \circ y$ pripada skupu A, što pišemo kratko

$$(\forall\, x, y \in A)\,(x \circ y) \in A.$$

Ako je skup A zatvoren za operaciju $\circ$, tada za dvojku $(A, \circ)$ kažemo da je *grupoid* ili da ima strukturu grupoida.[1)]

Za operaciju $\circ$ kažemo da je asocijativna ako vrijedi:

$$(\forall\, x, y, z \in A)\,(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

Definicija 6.2. Za uređenu dvojku $(A, \circ)$ nepraznog skupa A i algebarske operacije $\circ : A \times A \to A$ kažemo da je *polugrupa* ili *asocijativni grupoid*, ako je ta operacija asocijativna. Ako je operacija i komutativna, tj. ako važi

$$(\forall\, x, y \in A)\, x \circ y = y \circ x,$$

tada kažemo da je polugrupa komutativna.

Definicija 6.3. Za polugrupu $(A, \circ)$ kažemo da je *grupa* ako vrijedi:

1° $\quad (\exists\, e \in A)\,(\forall\, x \in A)\,(x \circ e = e \circ x = x)$;

2° $\quad (\forall\, x \in A)\,(\exists\, x^{-1} \in A)\,(x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e)$.

Za e kažemo da je *neutralni element* grupe, a za x^{-1} da je *inverzni element* elementa x.

Ako je u grupi $(A, \circ)$ operacija $\circ$ komutativna, kažemo da je grupa komutativna ili da je Abelova grupa.[2)]

Primjer 6.1. Dvojka $(N, +)$ je komutativna polugrupa, ali nije grupa, jer za ovu operaciju u skupu N ne postoji neutralni element. Dvojka $(Z, +)$ je komutativna grupa. Tu je neutralni element broj 0, a inverzni element za proizvoljni cio broj x je suprotan broj $-x$.

[1)] Općenito se definiše n-arna operacija $\circ$ ovako: ako je A neprazan skup i $B \subseteq A^n$, tada za preslikavanje $\circ : B \to A$ kažemo da je unutrašnja n-arna operacija definisana u skupu A. Ako je $B = A^n$, kažemo da je operacija $\circ$ definisana na skupu A. Za $n = 2$, imamo binarnu operaciju.

[2)] N. H. Abel (1802 – 1829) je norveški matematičar.

Definicija 6.4. Ako su u *nepraznom* skupu A date dvije unutarnje operacije, nazovimo ih "sabiranje" i "množenje" i označimo ih sa $+$ i $\cdot$, i ako vrijedi:

1° $(A, +)$ je komutativna grupa,

2° $(A, \cdot)$ je polugrupa,

3° operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$,

tada kažemo da trojka $(A, +, \cdot)$ ima strukturu *prstena* (asocijativnog prstena). Podsjetimo se: osobinu distributivnosti možemo kratko zapisati:

$$(\forall\, x, y, z \in A)\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ i } (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Ako je polugrupa $(A, \cdot)$ komutativna, kažemo da je prsten komutativan, a ako ta polugrupa ima neutralni element, kažemo da je to prsten sa jedinicom. Skup Z cijelih brojeva sa operacijama sabiranja i množenja je komutativni prsten sa jedinicom — to je broj 1.

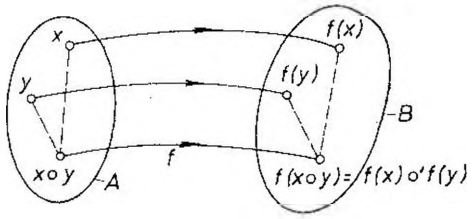
Definicija 6.5. Za prsten $(A, +, \cdot)$ kažemo da ima strukturu *polja* ako vrijedi:
skup A ima bar dva elementa,
dvojka $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativna grupa, pri čemu je 0 neutralni element sabiranja.

Skup Q racionalnih, kao i skup R realnih brojeva sa operacijama sabiranja i množenja imaju strukturu polja.

Definicija 6.6. Za strukture $(A, \circ)$ i $(B, ')$ kažemo da su *izomorfne* ako postoji bijekcija $f: A \to B$ tako da vrijedi:

$$(\forall\, x, y \in A)\ f(x \circ y) = f(x)' f(y),$$

što je prikazano na slici 6.1.



Sl. 6.1.

Definicija 6.7. a) Za grupu $(A, +)$ kažemo da je (linearno) *uređena* ako je skup A linearno uređen i ako vrijedi:

$$(\forall\, x, y, z \in A)\, x < y \Rightarrow (x + z < y + z) \wedge (z + x < z + y).$$

b) Za prsten $(A, +, \cdot)$ kažemo da je (linearno) uređen ako je $(A, +)$ uređena grupa i ako vrijedi

$$(\forall\, x, y, z \in A)(x < y \wedge z > 0) \Rightarrow (xz < yz) \wedge (zx < zy).$$

Zadaci (6.1 — 6.23)

6.1. Da li su sljedeći uređeni parovi grupoidi:

a) $(N, +)$; b) $(N, -)$; c) $(N, \cdot)$; d) $(Z, +)$; e) $(Z, :)$; f) $(Q, :)$; g) $(Q \setminus \{0\}, :)$; h) $(Z', +)$; i) $(Z', \cdot)$,

pri čemu Z' označava skup neparnih cijelih brojeva?

6.2. Date su sljedeće permutacije skupa $\{1, 2, 3\}$:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(vidjeti definiciju 5.4). Tu je, npr., $p_2(1) = 2$, $p_2(2) = 3$, $p_2(3) = 1$. Ako je $\circ$ oznaka za operaciju slaganja (kompozicije) permutacija, pokazati da je skup $\{p_1, p_2, p_3\}$ grupoid u odnosu na operaciju $\circ$, a da skup $\{p_1, p_3, p_4\}$ u odnosu na tu operaciju nije grupoid.

6.3. Da li su sljedeće strukture polugrupe ili grupe:

a) $(Z, +)$; b) $(Z, \cdot)$; c) $(Q, +)$; d) $(Q, \cdot)$, e) $(Q \setminus \{\ \}, \cdot)$?

Da li su sljedeće strukture grupe:

f) $(Q^+, \cdot)$; g) $(Q^+, :)$,

pri čemu je Q^+ skup pozitivnih racionalnih brojeva?

6.4. Neka je dat skup $S = \left\{\frac{1 + 2m}{1 + 2n} : m, n \in Z\right\}$ i neka je $\cdot$ uobičajeno množenje. Dokazati da je $(S, \cdot)$ komutativna grupa.

6.5. Neka je P skup svih polinoma prvog stepena $ax + b$, $a, b \in R$. Dokazati da je $(P, +)$ komutativna grupa.

6.6. Neka je E bilo kakav skup, a S skup svih permutacija skupa E (tj. skup svih bijektivnih preslikavanja skupa E na sama sebe). Ako je $\circ$ operacija slaganja (kompozicije) preslikavanja, dokazati da je $(S, \circ)$ grupa.

6.7. Dat je skup od četiri realne funkcije $S = \left\{f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{x},\ f_3(x) = -x,\right.$ $\left. f_4(x) = -\frac{1}{x}\right\}$, i u skupu S operacija $\circ$ kao operacija slaganja funkcija. Dokazati da je $(S, \circ)$ grupa.

6.8. Dat je skup realnih funkcija:

$$S = \left\{f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} : a, b, c, d \in R,\ ad - bc = 1\right\}$$

i operacija $\circ$ slaganja (kompozicije) funkcija. Dokazati da je $(S, \circ)$ grupa.

6.9. Odrediti skup S svih izometrija ravni koje pravougaonik $ABCD$ preslikavaju na sama sebe, i pokazati da je skup S komutativna grupa u odnosu na operaciju $\circ$ slaganja izometrija.

6.10.* Pokazati da je skup S svih preslikavanja ravni α koja dati jednakostranični trougao ABC u ravni α preslikavaju na taj trougao grupa u odnosu na operaciju slaganja tih preslikavanja.

6.11. a) Dat je skup $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Z\}$. Dokazati da je $(S, +, \cdot)$ prsten, gdje su $+$ i $\cdot$ uobičajeno sabiranje i množenje.

b) Dat je skup $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$. Dokazati da je $(S, +, \cdot)$ polje.

6.12. Dat je skup $S = \{\ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$ i u njemu operacija običnog množenja. Da li je $(S, \cdot)$ grupa? Ako je $+$ znak operacije običnog sabiranja, da li je $(S, +, \cdot)$ prsten, odnosno polje?

6.13. U skupu Z cijelih brojeva date su dvije algebarske operacije $*$ i $\circ$ na sljedeći način:

$$a * b = a + 2b, \qquad a \circ b = 2ab.$$

Da li su te operacije komutativne i asocijativne i da li je jedna u odnosu na drugu distributivna?

6.14. Na skupu R realnih brojeva date su dvije algebarske operacije $\oplus$ i $\odot$ ovako:

$$x \oplus y \overset{\text{def.}}{=} x + y + 1, \qquad x \odot y \overset{\text{def.}}{=} xy + x + y,$$

a treba dokazati da trojka $(R, \oplus, \odot)$ ima strukturu polja.

6.15. U skupu $Z^2 = Z \times Z$ date su operacije $\oplus$ i $\odot$ na sljedeći način:

$$(m, n) \oplus (p, q) = (m + p, n + q),$$
$$(m, n) \odot (p, q) = (mp + nq, mq + np).$$

Dokazati da je $(Z^2, \oplus, \odot)$ prsten.

6.16.* Neka je $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i neka su operacije $\oplus$ i $\odot$ definisane ovako: za $a, b \in Z_5$ je $a \oplus b$ ostatak pri dijeljenju broja $a + b$ sa 5, a $a \odot b$ je ostatak pri dijeljenju broja $a \cdot b$ sa 5. Dokazati da je $(Z_5, \oplus, \odot)$ polje (ovo polje se zove polje ostataka po modulu 5).

6.17. U zadatku 6.16.* data je definicija polja $(Z_5, \oplus, \odot)$. Umjesto $\oplus$ i $\odot$ pisaćemo, kratkoće radi, $+$ i $\cdot$, tako da imamo polje $(Z_5, +, \cdot)$. Sastaviti tablice za operacije $+$ i $\cdot$. Na osnovu toga izračunati:

$$\text{a) } 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 - 4; \qquad \text{b) } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3}$$

(pri čemu $\frac{a}{b}$ znači $a \cdot b^{-1}$, npr., $\frac{3}{2} = 3 \cdot 2^{-1} = 3 \cdot 3 = 4$).

6.18. Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten. Neutralni element za sabiranje ćemo označiti sa 0. Dokazati da vrijedi:

a) $-(-x) = x$; b) $-(x + y) = (-y) + (-x) = (-x) + (-y)$; c) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;
d) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$; e) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$; f) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

(ako je $-x$ oznaka za suprotni element elementa x u odnosu na operaciju $+$).

6.19. Neka je data uređena grupa $(G, +)$, sa 0 kao neutralnim i sa $-x$ kao inverznim elementom od x. Dokazati da vrijedi:

a) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$; b) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$;

c) $a < 0 \Leftrightarrow -a > 0$; d) $a < b \Leftrightarrow -a > -b$;

e) $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow a + b > 0$; f) $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a + b < 0$;

g) $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$.

6.20. Dokazati da u uređenom prstenu $(P, +, \cdot)$ vrijede osobine:

a) $(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$; b) $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow ab > 0$;

c) $(a < 0 \wedge b < 0) \Rightarrow ab > 0$; d) $(a < 0 \wedge b > 0) \vee (a > 0 \wedge b < 0) \Rightarrow ab < 0$;

e) $(0 < a < b) \wedge (0 < c < d) \Rightarrow ac < bd$; f) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$;

g) $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$; h) $ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$.

6.21. Neka je $G = \{1, -1, i, -i\}$, a operacija $\cdot$ neka je obično množenje. Dokazati da je grupoid $(G, \cdot)$ izomorfan grupoidu $(H, \circ)$, gdje je $H = \{a, b, c, d\}$ i operacija $\circ$ u H data tablicom

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

6.22. Pokazati da funkcija

$$f: R \to R^+, \qquad f(x) = 2^x$$

preslikava izomorfno grupu $(R, +)$ na grupu $(R^+, \cdot)$.

6.23. Neka su u skupu cijelih brojeva Z date operacije $\oplus$ i $\odot$ ovako:

$$a \oplus b = a + b + 1$$
$$a \odot b = a \cdot b + a + b.$$

Pokazati da funkcija

$$f: Z \to Z, \qquad f(x) = x - 1$$

predstavlja izomorfizam prstena $(Z, +, \cdot)$ na prsten $(Z, \oplus, \odot)$.

7. PRIRODNI BROJEVI[1)]

Definicija 7.1. Kažemo da je prirodni broj m djeljiv prirodnim brojem n i pišemo $n|m$ (čitaj: n dijeli m), ako i samo ako postoji prirodni broj p tako da je $m = np$. Tada kažemo da je n djelitelj (djelilac, faktor) broja m, a m sadržatelj (sadržalac, višekratnik) broja n.

Definicija 7.2. Za prirodni broj koji ima tačno dva djelioca kažemo da je *prost*, a ako on ima više od dva djelioca, kažemo da je *složen*. Broj 1 nije ni prost ni složen.

Definicija 7.3. Za prirodne brojeve m i n kažemo da su *relativno prosti* ako im je najveći zajednički djelilac D jednak 1, što pišemo kratko $D(m, n) = 1$.

Teorema 7.1. Ako je prirodni broj m djeljiv prirodnim brojevima n i p i ako je $D(n,p) = 1$, tada je m djeljiv sa np.

Teorema 7.2. Svaki složeni broj se može napisati u obliku proizvoda prostih brojeva, i to na jedinstven način.

Teorema 7.3. Polugrupe $(N, +)$ i $(N, \cdot)$ su uređene relacijom $\leqslant$, odnosno strogo uređene relacijom $<$.

Teorema 7.4. Za svaka dva prirodna broja m i n, $m \leqslant n$, postoje jednoznačno određeni brojevi $p \in N$ i $r \in N \cup \{0\}$, tako da vrijedi

$$m = np + r, \qquad 0 \leqslant r < n.$$

Zadaci (7.1—7.29)

7.1. Dokazati da prostih prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo.

7.2. Dokazati da je broj $n^2 - 1$ djeljiv sa 24 ako je n prost broj veći od 3.

7.3. Ako je n proizvoljan prirodni broj, tada su svi brojevi oblika

$$a = 3^{6n} + 3^{5n+1} + 3^{4n+1} + 3^{3n}$$

djeljivi sa 8. Dokazati.

[1)] U ovoj zbirci uzimamo da su skupovi N, Z, Q i R prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva poznati, kao i potreba proširivanja tih skupova. O tome zainteresirani čitalac može naći informacije u knjigama: S. Kurepa: Uvod u matematiku, S. Mardešić: Matematička analiza.

7.4. Dokazati da je proizvod tri susjedna prirodna broja od kojih je srednji kvadrat, djeljiv sa 60.

7.5. Dokazati da su, za svaki $n \in N$, brojevi a oblika

$$a = 10^n + 18n - 1$$

djeljivi sa 27.

7.6. Dokazati da su svi brojevi oblika $4^n + 15n - 1$, $n \in N$, djeljivi sa 9.

7.7. Dokazati da je $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, $n \in N$, djeljivo sa 17.

7.8. Brojevi oblika $5^{2n+3} + 3^{n+3} \cdot 2^n$, $n \in N$, su djeljivi sa 19. Dokazati.

7.9. Za sve parne prirodne brojeve n broj $n^3 + 20n$ djeljiv je sa 48. Dokazati.

7.10. Dokazati da su sve vrijednosti funkcije

$$f: N \to N, \quad f(n) = 3^{2n+3} + 40n - 27$$

djeljive brojem 64.

7.11. Dokazati da je $n^7 - n$, $n \in N$, djeljivo sa 42.

7.12. Za koje vrijednosti $n \in N$ su brojevi n, $n + 10$ i $n + 14$ prosti?

7.13. Dokazati da su brojevi $21n + 4$ i $14n + 3$, za svaki prirodni broj n, relativno prosti.

7.14. Prirodni broj $n = 10a + b$, $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ djeljiv je brojem $m = 10q + 1$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ako i samo ako je broj $a - bq$ djeljiv sa m. Dokazati.

7.15. Ako je $n \in N$, $n > 3$ i n prost broj, tada pri dijeljenju broja n^2 sa 12 dobijemo ostatak 1. Dokazati.

7.16. Svaki broj oblika 15^n, $n \in N$, pri dijeljenju sa 7 ima ostatak 1. Dokazati.

7.17. Za svaki prirodni broj $n \geqslant 2$ brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ imaju posljednju cifru 7. Dokazati.

7.18. Treba naći trocifreni prirodni broj $\overline{abc}$ (a, b i c su cifre), ako je četverocifreni broj $\overline{abc1}$ tri puta veći od četverocifrenog broja $\overline{2abc}$.

7.19. Odrediti sve četverocifrene prirodne brojeve djeljive sa 45, ako je razlika kvadrata cifre stotica i cifre desetica jednaka 24.

7.20. Kod prirodnih brojeva $m = \overline{.3..}$ i $n = \overline{37.15.}$ treba odrediti neispisane cifre tako da bude tačna jednakost $n = 45m$.

7.21. Koliko treba sabrati prvih prirodnih brojeva da bi zbir bio trocifren broj jednakih cifara, i koji je to broj?

7.22. Prirodni broj n ima cifru desetica a i cifru jedinica b. Da bi broj n bio djeljiv sa 4 potrebno je i dovoljno da je broj $2a + b$ djeljiv sa 4. Dokazati.

7.23. Šestocifreni prirodni broj m ima sve cifre jednake, a četverocifreni prirodni broj n ima također sve cifre jednake. Pri dijeljenju broja m sa n dobije se količnik 233 i ostatak r. Ako se brojevima m i n odbaci zadnja cifra, dobiju se brojevi m_1 i n_1 kod kojih je količnik opet jednak 233, a ostatak je manji za 1 000. Treba odrediti brojeve m i n.

7.24. Naći sve petocifrene brojeve oblika $\overline{34x5y}$ koji su djeljivi sa 36.

7.25. Proizvod prirodnih brojeva x i y je trocifreni broj sa jednakim ciframa, a njihov zbir je dvocifren broj također jednakih cifara. Naći sve takve brojeve x i y.

7.26. Treba odrediti najveću vrijednost omjera četverocifrenog prirodnog broja i zbira njegovih cifara.

7.27. Zbir cifara trocifrenog prirodnog broja m je 7. Da bi on bio djeljiv sa 7, potrebno je i dovoljno da su mu cifre jedinica i desetica jednake. Dokazati.

7.28.* Dokazati da postoji svega 25 dvocifrenih prirodnih brojeva sa osobinom da je razlika između svakog od njih i broja napisanog istim ciframa u obrnutom poretku jednaka kvadratu cijelog broja k.

7.29.* Dokazati da je broj 145 jedini trocifreni prirodni broj koji je jednak zbiru faktorijela svojih cifara.

8. CIJELI BROJEVI

Definicija 8.1. Za cio broj a kažemo da je djeljiv cijelim brojem b, $b \neq 0$, ako i samo ako postoji cio broj q tako da je $a = bq$. Tada pišemo $b|a$ (čitaj: b dijeli a).

Definicija 8.2. Za cio broj p različit od ± 1 kažemo da je *prost* ako je djeljiv samo sa $\pm p$ i sa ± 1. Ako cio broj p, $p \neq 0$, osim ovih, ima i drugih djelilaca, kažemo da je *složen*. Brojevi $0, \widehat{1}\,\widehat{1}, -1$ nisu ni prosti ni složeni.

Teorema 8.1. Grupa $(Z, +)$ i prsten $(Z, +, \cdot)$ su uređeni relacijom $\leqslant$, odnosno strogo uređeni relacijom $<$.

Teorema 8.2. Za svaka dva cijela broja a i b, $b \neq 0$, postoje jednoznačno određeni cijeli brojevi q i r tako da vrijedi:

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < |b|.$$

Definicija 8.3. Za cio broj a kažemo da je *kongruentan* cijelom broju b po modulu m, $m \in N$, ako i samo ako je razlika $a - b$ djeljiva sa m, što pišemo kratko:

$$a \equiv b \,(\mathrm{mod} m) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists\, q \in Z)\, a - b = mq.$$

Tako je, na primjer, $17 \equiv 5 \,(\mathrm{mod} 3)$, jer je $17 - 5 = 12$, a broj 12 je djeljiv sa 3.

Teorema 8.3. Brojevi a i b kongruentni su po modulu m ako i samo ako, pri dijeljenju sa m, imaju jednake ostatke.

Prema teoremi 8.2, za brojeve $a \in Z$ i $m \in N$ vrijedi jednakost $a = mq + r$, $q \in Z$, $0 \leqslant r < m$, odakle slijedi da je

$$a - r = mq.$$

Zato, na osnovu definicije 8.4, vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 8.4. Broj a kongruentan je svom ostatku r pri dijeljenju prirodnim brojem m, tj.

$$a \equiv r \,(\mathrm{mod} m).$$

Ako je broj a djeljiv brojem m tada je ostatak $r = 0$ i obrnuto, pa je tada

$$a \equiv 0 \,(\mathrm{mod} m).$$

Zadaci (8.1—8.27)

8.1. Dokazati da je razlika kuba svakog cijelog broja n i tog broja djeljiva sa 6.

8.2. Dokazati da je broj $a = n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljiv sa 120 za svaki prirodni broj n.

8.3. Dokazati da je razlika kvadrata dva neparna broja djeljiva sa 8.

8.4. Dokazati da je razlika između trocifrenog broja čije su cifre redom tri uzastopna prirodna broja, i broja napisanog pomoću istih cifara uzetih obrnutim redom djeljiva sa 99.

8.5. Dokazati da je za svaki neparan cio broj a izraz $a^4 + 7(7 + 2a^2)$ djeljiv sa 64.

8.6. Brojevi oblika

$$2^{12n+3} - 3^{6n+2}, \quad n \in N$$

su djeljivi brojem 13. Dokazati.

8.7. Ako su p i q cijeli brojevi, broj $3p + 2q$ djeljiv je sa 5 ako i samo ako je broj $4p + q$ djeljiv sa 5. Dokazati.

8.8. Neka su p, p_1, p_2, ..., p_m cijeli brojevi, a n prirodni broj.

a) Dokazati da je broj $p(p^{2n} - 1)$ djeljiv sa 6;

b) dokazati da je zbir

$$S = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$$

djeljiv sa 6 ako i samo ako je zbir

$$S_1 = p_1^{2n+1} + p_2^{2n+1} + \ldots + p_m^{2n+1}$$

djeljiv sa 6.

8.9. Ako je p prost broj, tada ne postoje cijeli brojevi m i n različiti od 0 tako da je $m^2 = pn^2$. Dokazati.

8.10. a) Ako je zbir brojeva x i y djeljiv sa 7, tada je zbir $x^7 + y^7$ djeljiv sa 49. Dokazati.
b) Dokazati da tvrdnja vrijedi za svaki neparni prost broj p.

8.11. Dokazati da su brojevi oblika $a^{4n+1} - a$ djeljivi sa 30 za sve cijele brojeve a i prirodne brojeve n.

8.12.* Dokazati da je mjera bar jedne stranice Pitagorinog[1] trougla djeljiva sa 5 (to je pravougli trougao čije su dužine stranica prirodni brojevi).

8.13. Da li jednačina $6x + 15y = 2$ ima rješenja (x, y) u skupu Z cijelih brojeva?

8.14. Dokazati da su za svaki parni broj n brojevi koji su dati izrazom

$$\frac{n}{12} + \frac{n^2}{8} + \frac{n^3}{24}$$

cijeli.

[1] Pitagora (580—500 pr. n. e.) je veliki grčki matematičar i filozof.

8.15. Dokazati da se pri dijeljenju prostog broja a brojem 30 dobije ostatak r koji je jednak 1 ili je prost broj.

8.16. Dokazati da nijedan parni broj koji nije djeljiv sa 4 ne možemo prikazati kao razliku kvadrata dva cijela broja.

8.17. Dokazati da zbir kvadrata dva neparna broja ne može biti kvadrat cijelog broja.

8.18. Riješiti Diofantovu[1] jednačinu $27x + 50y = 200$. (Diofantove jednačine su one jednačine čija su rješenja (x, y) parovi cijelih brojeva.)

8.19. Dokazati da između proizvoljnih $n + 1$ cijelih brojeva postoje dva broja čija je razlika djeljiva sa n.

8.20. U skupu Z cijelih brojeva data je relacija ϱ ovako:

$$\varrho = \{(x, y) \in Z \times Z : 3 \mid (x - y)\}.$$

Dokazati da je ϱ relacija ekvivalencije i odrediti njene klase.

8.21. Dokazati da je relacija kongruencije relacija ekvivalencije u skupu Z.

8.22. Dokazati da se kongruencije po istom modulu mogu sabirati, oduzimati i množiti.

8.23. Dokazati da za kongruencije vrijedi implikacija

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m},\ n \in N.$$

8.24. Dokazati da je za svaki prirodni broj n broj

$$a = 37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$$

djeljiv sa 7.

8.25. Dokazati da je broj

$$a = 72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$$

djeljiv sa 25, za svaku vrijednost $n \in N$.

8.26. Broj $2^{60} + 7^{30}$ je djeljiv sa 13. Dokazati (pomoću kongruencija).

8.27. Treba pomoću kongruencija dokazati da za proizvoljne cijele brojeve a i b i prirodan broj n vrijede formule:

a) $(a - b) \mid (a^n - b^n),\ a \neq b$;
b) $(a + b) \mid (a^{2n-1} + b^{2n-1}),\ a + b \neq 0$;
c) $(a + b) \mid (a^{2n} - b^{2n}),\ a + b \neq 0$.

Kako biste ove tvrdnje dokazali bez korišćenja osobina kongruencije?

[1] Diofant (III vijek) je bio najveći grčki algebraičar.

9. RACIONALNI I REALNI BROJEVI. APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNOG BROJA

9.1. RACIONALNI I REALNI BROJEVI

Svaki racionalan broj možemo napisati u obliku $\frac{p}{q}$, $p, q \in Z$, $q \neq 0$. Ako su p i q relativno prosti brojevi i ako je $q = 1$, racionalan broj $\frac{p}{q}$ je cio, a ako je $q \neq 1$, racionalan broj $\frac{p}{q}$ je razlomak, nije cio broj.

Svaki racionalan broj se može prikazati u obliku konačnog ili beskonačnog periodičnog decimalnog razvoja. Tako, na primjer, za broj $\frac{3}{15}$ imamo:

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2,$$

a za broj $\frac{7}{6}$ imamo:

$$\frac{7}{6} = 7:6 = 1{,}1666\ldots = 1{,}16.$$

Vrijedi i obrnuto: svaki konačan ili beskonačan periodičan decimalni razvoj može se napisati u obliku $\frac{p}{q}$, $p, q \in Z$, $q \neq 0$, što znači da je takav decimalni razvoj racionalan broj. To ćemo pokazati u zadacima.

Realni brojevi koji se ne mogu napisati u obliku $\frac{p}{q}$, $p, q \in Z$, $q \neq 0$ su *iracionalni*[1]. Njihov decimalni razvoj je beskonačan neperiodičan. Tako je, na primjer, $\sqrt{2}$ iracionalan broj:

$$\sqrt{2} = 1{,}4149\ldots$$

Neka je Q skup racionalnih a R skup realnih brojeva. Pokazuje se da su trojke $(Q, +, \cdot)$ i $(R, +, \cdot)$ polja, pri čemu vrijede osobine

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c, \tag{9.1}$$

$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc. \tag{9.2}$$

[1] Ovo ne treba shvatiti kao definiciju iracionalnih brojeva. O tome vidi fusnotu navedenu kod prirodnih brojeva.

Zadaci (9.1—9.17)

9.1. Dokazati da je skup Q racionalnih brojeva "svuda gust", tj. da između svaka dva racionalna broja r i s postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

9.2. Racionalan broj $r = 0,\dot{2}\dot{1}$ treba napisati u obliku razlomka $\frac{a}{b}$.

9.3. Dokazati da su brojevi: a) $0,\dot{2} = 0,222\ldots$ i b) $0,12 = 0,1222\ldots$ racionalni.

9.4. Napisati broj $13,3\dot{2}$ u obliku razlomka.

9.5. Kod razlomka $\frac{n}{n^2-1}$ je n prirodan broj veći od 1. Ako mu se brojnik i nazivnik povećaju za 2, razlomak će biti veći od $\frac{1}{3}$, a ako se umanje za 3, razlomak će biti manji od $\frac{1}{10}$ i pozitivan. Naći vrijednost ovog razlomka.

9.6. Dokazati da broj $\sqrt{2}$ nije racionalan.

9.7. Dokazati da su brojevi: a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{6}$ i c) $\sqrt{7}$ iracionalni.

9.8. Koji između sljedećih brojeva su racionalni, a koji iracionalni:

a) $\log_5 7$; b) $11^{\log_{11}150} : 13^{\log_{13}13}$; c) $\log_5 25^2 \cdot \log_5 0{,}008$?

9.9. Dokazati da je broj $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ racionalan, a broj

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$$ iracionalan.

9.10. Naći racionalna rješenja jednačine

$$x + \sqrt{2} = x\sqrt{2} + a^2,$$

gdje je a racionalni parametar.

9.11. Dokazati da broj $1 + \sqrt{3}$ ne može biti prikazan kao kvadrat broja $a + b\sqrt{3}$, pri čemu su a i b racionalni brojevi.

9.12. Za koje cijele brojeve a i b je $x = 1 + \sqrt{3}$ jedno rješenje jednačine $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$?

9.13. Za koje cijele brojeve m su rješenja jednačine

$$mx^2 - (1-2m)x + m - 2 = 0$$

racionalna?

9.14. Dokazati ove tvrdnje:

a) Ako se razlomak $\frac{ak+b}{ck+d}$, $(a, b, c, d, k \in Z)$, može skratiti sa m, onda je $ad - bc$ djeljivo sa m.

b) Razlomak $\frac{5k+6}{8k+7}$, $(k \in Z)$, se može skratiti samo sa 13.

c) Razlomak $\frac{21n+4}{14n+3}$, $(n \in N)$, se ne može skratiti.

9.15. Koliko ima racionalnih brojeva u izrazu $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$ (kada se on razvije po Njutnovoj binomnoj formuli)? (Vidjeti primjer 3.6.)

9.16. Označimo sa $E(x)$, $x \in R$, najveći cio broj koji nije veći od x. Riješiti jednačine:

a) $E(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases}$ b) $E(a)E(x) = 0$ za dati realni broj a;

c) $E(x) + x = k$ za dati cio broj k; d) $E(x) \cdot E(y) = 1$.

9.17.* 0 (realnim) brojevima: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se zna da je $a_0 = a_n = 0$ i da je $(\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}) a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geqslant 0$. Dokazati da nijedan od brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ nije pozitivan.

9.2. APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNOG BROJA

Definicija 9.1. *Apsolutna vrijednost* (ili *modul*) $|x|$ realnog broja x za $x \geqslant 0$ je sam broj x, a za $x < 0$ pozitivan broj $-x$, tj.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \tag{9.3}$$

ili $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$, gdje je simbol sgn (znak) dat sa

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Formule (9.3) definišu funkciju $|\ |: R \to [0, +\infty)$, koja se zove apsolutna vrijednost, modul ili *norma* na R.

Primjer 9.1.

a) $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-5| = -(-5) = 5$, ili
$|-5| = (-5) \cdot \operatorname{sgn}(-5) = -5 \cdot (-1) = 5$;

b) $|1{,}3| = |-1{,}3| = 1{,}3$;

c) $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$;

d) $|a^2| = a^2$, $|-a^2| = -(-a^2) = a^2$, jer je $-a^2 \leqslant 0$ za sve $a \in R$.

Apsolutna vrijednost $|x|$ realnog broja x definiše se i formulom

$$|x| = \max(x, -x), \tag{9.5}$$

odnosno sa

$$|x| = \sqrt{x^2}, \tag{9.6}$$

gdje je $\sqrt{x^2}$ aritmetički korijen broja x^2. [1)]

Nije teško zaključiti da su sve tri navedene definicije apsolutne vrijednosti realnog broja međusobno ekvivalentne.

Iz (9.3) i svojstva relacije $\leqslant$ izlazi neposredno:

$$(\forall x \in R) \quad |x| \geqslant 0; \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \tag{9.7}$$

$$(\forall x \in R) \quad |-x| = |x|. \tag{9.8}$$

$$(\forall x, y \in R) \quad |y - x| = |x - y|. \tag{9.9}$$

$$(\forall x \in R) \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|. \tag{9.10}$$

Pokažimo, npr., da vrijedi (9.10).

Sigurno

$$x \leqslant |x|.$$

Isto tako

$$-|x| \leqslant x.$$

Dakle,

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Na osnovu definicije apsolutne vrijednosti realnog broja i svojstava relacije $\leqslant$ u R lako se dokazuje sljedeća teorema.

Teorema 9.1. Apsolutna vrijednost realnog broja ima ove osobine:

$$\text{a)} \ (\forall x \in R) \quad (0 \leqslant a \in R) \Rightarrow (|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a), \tag{9.11}$$

$$\text{b)} \ (\forall x \in R) \quad (0 \leqslant a \in R) \Rightarrow (|x| \geqslant a \Leftrightarrow (x \leqslant -a \vee x \geqslant a)), \tag{9.12}$$

$$\text{c)} \ (\forall x, y \in R) \quad ||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|, \tag{9.13}$$

s tim da je $|x + y| = |x| + |y|$ za $x, y \neq 0$, ako i samo ako je $x = ty$, $t \in R^+$.

$$\text{d)} \ (\forall x, y \in R) \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|. \tag{9.14}$$

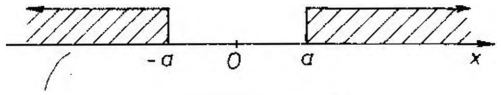
$$\text{e)} \ (\forall x, y \in R, \ y \neq 0) \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}. \tag{9.15}$$

[1)] Nenegativan broj b čiji je n-ti stepen jednak datom nenegativnom broju a zove se n-ti aritmetički korijen broja a i označava se sa $\sqrt[n]{a}$.

Dokažimo, npr., osobine (9.12) i (9.13).

1° Pretpostavimo da je $|x| \geqslant a$ $(a \geqslant 0)$. Tada za $x \geqslant 0$ je $|x| = x$, pa $|x| \geqslant a$ povlači $x \geqslant a$. Za $x < 0$ imamo $|x| = -x$ pa iz $-x \geqslant a$ slijedi $x \leqslant -a$. Prema tome, $|x| \geqslant a\,(a \geqslant 0)$ povlači $x \geqslant a$ ili $x \leqslant -a$. Zaključivanjem obrnutim redom dokazujemo da $(x \leqslant -a \vee x \geqslant a)$ (za $a \geqslant 0$) povlači $|x| \geqslant a$, što kompletira dokaz osobine (9.12).

Prema (9.12), za neki $a > 0$ vrijednosti varijable x za koje je $|x| \geqslant a$ ispunjavaju skup $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ (vidi sl. 9.1).



Sl. 9.1.

2° Prema (9.10) je:

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobijemo:

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|,$$

što je ekvivalentno (na osnovu (9.11)) sa:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Kako je $x - y = x + (-y)$, to, prema (9.11), imamo i

$$|x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Dakle, dokazali smo da je $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

Dalje je $|x| = |(x \pm y) \mp y| \leqslant |x \pm y| + |y|$, tj. $|x \pm y| \geqslant |x| - |y|$. Na isti način je $|x \pm y| \geqslant |y| - |x|$, tj. $-|x \pm y| \leqslant |x| - |y|$. Prema tome je $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

Geometrijski, apsolutna vrijednost realnog broja x predstavlja rastojanje između tačaka 0 i x na brojevnoj pravoj. Takođe, apsolutna vrijednost $|x - y|$ razlike brojeva x i y geometrijski predstavlja rastojanje između tačaka x i y na brojevnoj pravoj. Vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 9.2. Funkcija $d : R \times R \to R$ definisana sa

$$(\forall\, x, y \in R) \quad d(x, y) = |x - y|$$

ima ove osobine:

1) $d(x, y) \geqslant 0$ $\quad (\forall\, x, y \in R)$;
2) $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;
3) $d(x, y) = d(y, x)$ $\quad (\forall\, x, y \in R)$;
4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ $\quad (\forall\, x, y, z \in R)$.

Osobine 1) i 2) slijede iz (9.7), osobina 3) iz (9.9), dok osobina 4) slijedi iz (9.13), ako se umjesto x stavi $x - z$, a umjesto y stavi $z - y$.

Broj $d(x, y) = |x - y|$ se zove udaljenost realnih brojeva x i y, a funkcija d *razdaljinska funkcija* (ili *metrika*) na R.

Primjer 9.2. Nacrtati grafike funkcija:

a) $y = |x|$; b) $y = 2|x - 1| + |x + 1|$; c) $y = \operatorname{sgn} x$.

Rješenje: a) za $x \geqslant 0$ je $y = |x| = x$, a za $x < 0$ je $y = |x| = -x$, pa se grafik date funkcije sastoji od dvije poluprave (sl. 9.2).

b) Za $x \leqslant -1$ je $y = -2(x - 1) - (x + 1) = -3x + 1$, za $-1 < x < 1$ funkcija ima oblik $y = -2(x - 1) + (x + 1) = -x + 3$, dok za $x \geqslant 1$ imamo $y = 2(x - 1) + (x + 1) = 3x - 1$.

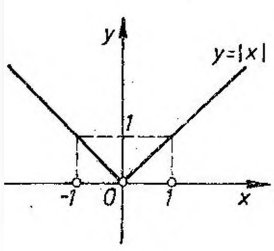
Dakle:

$$y = \begin{cases} -3x + 1, & x \leqslant -1, \\ -x + 3, & -1 < x < 1, \\ 3x - 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

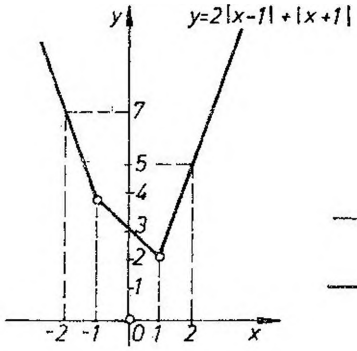
pa se grafik date funkcije sastoji iz dvije poluprave i jedne duži (sl. 9.3).

c) Iz $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

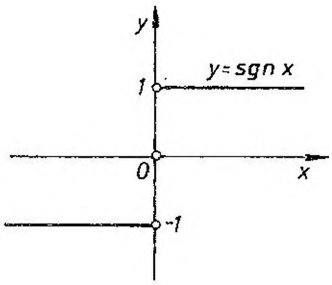
slijedi da se graf funkcije $\operatorname{sgn}: R \to R$ sastoji iz dvije poluprave i jedne tačke — koordinatnog početka (sl. 9.4).



Sl. 9.2.



Sl. 9.3.



Sl. 9.4.

Zadaci (9.18– 9.28)

Dokazati tačnost formula (u R) (9.17—9.24):

9.18. a) $\dfrac{|a| + a}{2} = \begin{cases} 0, & a \leqslant 0, \\ a, & a > 0; \end{cases}$

b) $\dfrac{|a| - a}{2} = \begin{cases} 0, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

9.19. a) $\dfrac{a+b+|b-a|}{2} = \max(a, b)$;

b) $\dfrac{a+b-|b-a|}{2} = \min(a, b)$.

9.20. a) $\dfrac{|a+b|+|a-b|}{2ab} = \dfrac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min(|a|, |b|)}, \quad (ab \neq 0)$;

b) $\dfrac{|a+b|-|a-b|}{2ab} = \dfrac{2}{\max(|a|, |b|)}, \quad (ab \neq 0)$.

9.21. a) $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$;

b) $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \geqslant |a_1| - \sum_{i=2}^{n} |a_i|, \quad (\forall\, n \in \{2, 3, 4, \ldots\})$.

9.22. a) $|ab| = |a| \cdot |b|$; b) $\left|\prod_{i=1}^{n} |a_i|\right| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|$;

c) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad (b \neq 0)$.

9.23. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| \geqslant a_n - a_1$, gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n, x$ realni brojevi.

9.24. $\left|\dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy}\right| + \left|\dfrac{x+y}{2} + \sqrt{xy}\right| = |x| + |y|, \quad (\forall\, x, y \in R,\ x \cdot y \geqslant 0)$.

9.25. Odrediti maksimalan (najobuhvatniji) podskup $E \subseteq R$ na kome su jednakosti:

a) $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| = \dfrac{x}{x+1}$; b) $\left|x - \dfrac{x^2}{x+1}\right| = x - \dfrac{x^2}{x+1}$

identiteti.

9.26. Data je realna funkcija jedne realne promjenljive

$$f(x) = \left(\left|\frac{x+2}{x-2}\right| - 1\right) : \left(\left|\frac{x+2}{x-2}\right| + 1\right).$$

a) Nacrtati grafik funkcije f_1 date sa

$$f_1(x) = f(x), \quad \text{za} \quad x \in (-2, 2).$$

b) Nacrtati grafik funkcije f.

c) Odrediti skupove vrijednosti funkcije f_1 i f.

9.27. Nacrtati grafike realnih funkcija datih sljedećim formulama:

a) $f(x) = \left|\frac{2x-1}{3x+2}\right|$; b) $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)$;

c) $f(x) = \frac{1}{|x^2-1|}$; d) $f(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{1+|x|}$;

e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\frac{2x-1}{x+3}, & x \in (5, +\infty), \\ \left|\frac{2x-1}{x+3}\right|, & x \in (-\infty, 5). \end{cases}$

9.28.* Predstaviti grafički linije date sa:

a) $\max(|x|, |y|) = 1$; b) $|x|^a + |y|^a = 1$, $(a \in \{1, 2, 3\})$.

10. NEKE TRANSFORMACIJE, JEDNAKOSTI I NEJEDNAKOSTI. BROJEVNE SREDINE

10.1. NEKE TRANSFORMACIJE I JEDNAKOSTI U SKUPU REALNIH BROJEVA

Zadaci (10.1–10.26)

Rastaviti na faktore sljedeće polinome:

10.1. a) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - c^3$;

b) $a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$.

10.2. a) $a^4 + a^2b^2 + b^4$; b) $a^4 + 4b^4$.

10.3. a) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$;

b) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

10.4. a) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

10.5. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

10.6. Ako je $a + b + c = 0$, dokazati da vrijede jednakosti:

a)* $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$;

b) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

10.7. Ako je $ax + by = 0$, dokazati da vrijedi:

a) $\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$; b) $\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$.

10.8. Uprostiti izraz

$$\frac{abcd\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)}{ab + cd}$$

ako je $a + b = c + d$.

10.9.* Dokazati da vrijedi implikacija

$$xyz = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

10.10. Uprostiti izraz

$$\frac{ab^{-2}(a^{-1}b^2)^4(ab^{-1})^2}{a^{-2}b(a^2b^{-1})^3a^{-1}b^{-1}},$$

a zatim mu odrediti vrijednost za $a = 10^{-3}$ i $b = -10^{-2}$.

10.11. Nacrtati grafik realne funkcije date izrazom

$$f(x) = \left(\sqrt[2n+1]{x^{n+2}\cdot\sqrt[3]{x^{n-4}}}\right)^{-1}, \quad n \in N.$$

10.12. Posmatrajmo u skupu R realnih brojeva izraz

$$f(a,b) = \left[a^{-\frac{3}{2}}b\,(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3.$$

a) Odrediti definiciono područje izraza $f(a,b)$;

b) pokazati da je $f(a,b) = 1$ za $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

c) Kada uopšte vrijedi jednakost $f(a,b) = 1$?

d) Uz koje uslove je $f(a,b) < 0$?

Racionalisati nazivnike sljedećih razlomaka:

10.13. a) $\frac{2}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

10.14. $\frac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$. **10.15.** $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$. **10.16.** $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Dokazati da vrijede jednakosti:

10.17. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$

10.18. $\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = -2.$

10.19. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$

10.20. Izračunati vrijednost izraza

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

10.21. Uprostiti izraz

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

ako je $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a>0$, $b>0$.

10.22. Dokazati da je za $a>0$ i $b>0$ tačna jednakost

$$\left[2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{b}}+\frac{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{2a}+\sqrt[4]{b}}\right)^{-2}\right]:\left(1+\frac{b}{2a}-2\sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^{-1}}\right)=1.$$

10.23. Može se dokazati da je za sve realne vrijednosti x i y tačna jednakost

$$|x+y|+|x-y|=|x+\sqrt{x^2-y^2}|+|x-\sqrt{x^2-y^2}|.$$

Dokazati ovu jednakost za $x>0$ i proizvoljan $y\in R$. (Date izraze posmatrati i u kompleksnom području.)

10.24. Transformisati izraz

$$f(a)=\frac{(a^{-2}+b^{-2})\cdot(a-(2ab)^{\frac{1}{2}}+b)^{-1}}{(a^3+b^3)\cdot(a^2-ab+b^2)^{-1}}:\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+(2ab)^{\frac{1}{2}}}}{a^2b^2(a+b)(b+\sqrt{2ab})^{-1}},$$

a zatim nacrtati grafik funkcije f date ovim izrazom.

10.25.* Uprostiti izraz

$$(a+x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}+(a-x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}},$$

gdje je $x=4(a-1)$. Posmatrati slučajeve kada je $1<a<2$ i kada je $a>2$.

10.26.* Dokazati da vrijedi implikacija

$$(ax^3=by^3=cz^3\wedge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1)\Rightarrow\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

10.2. NEKE NEJEDNAKOSTI I BROJEVNE SREDINE

Definicija 10.1. Ako su a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ realni brojevi, tada za izraze

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, a_i > 0,$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, a_i > 0,$$

$$Q = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

kažemo, redom, da su *aritmetička, geometrijska, harmonijska* i *kvadratna sredina* tih brojeva.

Naziv "sredina" dolazi odatle što za ove izraze vrijedi sljedeća očigledna teorema.

Teorema 10.1. Vrijednost A, G i H nije manja od najmanjeg i nije veća od najvećeg između brojeva a_i; vrijednost izraza Q nije manja od najmanje i nije veća od najveće između apsolutnih vrijednosti brojeva a_i.

U izrazima G i H uzimamo da je $a_i > 0$, da bi ti izrazi bili definisani u skupu R, jer u skupu C kompleksnih brojeva ne uvodimo relaciju $<$, pa u tom skupu nema smisla govoriti o sredinama.

Teorema 10.2. Za sredine pozitivnih realnih brojeva a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ vrijede relacije

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q,$$

a za proizvoljne realne brojeve a_i vrijedi relacija

$$|A| \leqslant Q.$$

Jednakost u ovim relacijama vrijedi onda i samo onda kada je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Teorema 10.3.a) Ako je zbir

(1) $$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

pozitivnih realnih brojeva x_i konstantan, proizvod

(2) $$P = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

je maksimalan kada su svi ti brojevi međusobno jednaki.

b) Ako je proizvod (2) konstantan, zbir (1) je minimalan kada su brojevi x_i međusobno jednaki.

Ova je teorema posljedica relacije $A \leqslant G$ u teoremi 10.2, jer iz nje slijedi

$$S \geqslant n \cdot \sqrt[n]{P}, \qquad P \leqslant \left(\frac{S}{n}\right)^n.$$

Veličine S i P su ekstremne ako ovdje vrijedi znak $=$, a u teoremi 10.2. smo rekli da jednakost vrijedi ako i samo ako su brojevi jednaki.

Zadaci (10.27—10.65)

10.27. Uporediti po veličini brojeve:

a) 4^{-30} i 3^{-40}; b) 3^{400} i 4^{300};

c) $\left(\frac{1}{27}\right)^{17}$ i $\left(\frac{1}{81}\right)^{13}$; d) $(-243)^9$ i $(-64)^{15}$.

10.28. Dokazati tačnost formule $3^n > 2n$ za svaki $n \in N$, i to:
a) pomoću matematičke indukcije;
b) pomoću binomne formule.

10.29. Dokazati tačnost formule

$$2^{n+2} > 2n + 5, \quad n \in N.$$

10.30. Dokazati Koši-Švarcovu nejednakost[1]

$$(ax + by)^2 \leqslant (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

Kada tu vrijedi jednakost?

10.31. Dokazati Bernulijevu nejednakost[2]

$$(1 + h)^n \geqslant 1 + nh, \qquad n \in N, \qquad h \geqslant -1.$$

10.32. Dokazati da su tačne sljedeće nejednakosti:

a) $(\forall\, n \in N)(\forall\, h \in (0,1))\ \ (1 - h)^n \geqslant 1 - nh$;

b) $(\forall\, n \in N)(\forall\, h \in \left(0, \frac{1}{n}\right))\ (1 + h)^n < \frac{1}{1 - nh}$.

10.33. $(\forall\, x \in R)(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1 \geqslant 0$.

10.34. a) $(\forall\, a, b \in R^+)\ a^4 + b^4 \geqslant a^3 b + ab^3$;

b) $(\forall\, a, b \in R^+)\ (\forall\, n \in N)\ a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^n b + ab^n$.

10.35. $(\forall\, a, b \in R^+)\ (\forall\, n \in N) \left(\frac{a + b}{2}\right)^n \leqslant \frac{a^n + b^n}{2}$.

---

[1] A. Cauchy (1789—1857) je francuski, a H. Schwarz (1843—1921) njemački matematičar.
[2] J. Bernoulli (1654—1705) je švajcarski matematičar iz poznate porodice matematičara.

10.36. $n(x-1) \leqslant x^n - 1 \leqslant nx^{n-1}(x-1)$, $x \in R$, $x \geqslant 1$, $n \in N$.

10.37. $(\forall\, a, b, c \in R)\ ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

10.38. $abc\,(a+b+c) \leqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leqslant a^4 + b^4 + c^4$, $a, b, c \in R$.

10.39. Dokazati da za sve vrijednosti $a, b, c \in R^+$ vrijede formule:

a) $3abc \leqslant a^3 + b^3 + c^3$;

b) $8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a) \leqslant \frac{8}{3}(a^3 + b^3 + c^3)$;

c) $27abc \leqslant (a+b+c)^3 \leqslant 9(a^3 + b^3 + c^3)$.

10.40. Ako su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$a < b + c,\ b < a + c \text{ i } c < a + b,$$

dokazati da je tada:

a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$;

b) $2(a^3 + b^3 + c^3) < (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$.

10.41.* Ako za realne brojeve a i b vrijedi jednakost $a + b = 1$, dokazati da su tačne formule:

a) $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$; b) $a^n + b^n \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \in N$.

Dokazati tačnost formula:

10.42. $(\forall\, a, b, c \in R)\ a + b + c = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

10.43. $(\forall\, a, b, c \in R^+)\ a^2 + b^2 + c^2 = 12 \Rightarrow a + b + c \leqslant 6$.

10.44. $(\forall\, a, b, c, d \in R^+)\ abcd = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10$.

Dokazati tačnost sljedećih formula:

10.45. $na^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a-b} < nb^{n-1}$, za $0 < a < b$.

10.46. $\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geqslant \frac{16}{3(a+b+c+d)}$, gdje su a, b, c i d pozitivni realni brojevi.

Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b i c vrijede sljedeće implikacije:

10.47. $a + b + c = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9$.

10.48.* $a + b + c = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geqslant 8$.

10.49. Dokazati da za sve realne brojeve a, b i c vrijedi

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

10.50. Dokazati da za sve realne pozitivne brojeve a, b, c i d vrijedi

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

10.51. Nejednakost $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$ je tačna ako nijedna podkorijena veličina nije negativna i ako je $a+b+c=1$. Dokazati. (Uputa: staviti $4a+1 = (4a+1)\cdot 1$, i posmatrati odnos između aritmetičke i geometrijske sredine.)

10.52. Ako je realan broj a, $0 < a \neq 1$, rješenje jednačine $x^n - 2x + 1 = 0$, $n \in N \setminus \{1\}$, tada je tačna nejednakost

$$a < \frac{1}{\sqrt[n]{(n-1)^2}}.$$

Dokazati.

10.53.* Dokazati tačnost formule:

$$(\forall\, x \in R)\,(\forall\, p \in (1, +\infty) \cap Q)\,(1+x)^p > 1 + px,$$

gdje je Q skup racionalnih brojeva.

Dokazati tačnost sljedećih nejednakosti:

10.54. $(\forall\, n \in N \setminus \{1\})\, n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

10.55. $(\forall\, n \in N \setminus \{1\})(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$, uzevši u obzir da je

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

10.56.* $(\forall\, n \in N)\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot n^n \leq \left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

10.57. $(\forall\, n \in N \setminus \{1\})\, \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

10.58. a) Ako su a_i i b_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ bilo kakvi realni brojevi, tada vrijedi formula Koši — Bunjakovskog[1]:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2.$$

Dokazati. Kada u ovoj formuli vrijedi znak jednakosti? Za uzor uporediti sa zadatkom 10.30.

[1] V. Bunjakovski (1804 - 1889) je ruski matematičar.

b) Dokazati da za realne brojeve a_i i b_i, $i = 1,2,\ldots,n$ vrijedi formula

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant 1,$$

ukoliko su ispunjeni uslovi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1.$$

10.59. Neka je $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Dokazati da tada vrijedi nejednakost Čebiševa[1]:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n).$$

10.60. a) Ako su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi i ako je $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, tada vrijedi

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n;$$

b) ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi, tada vrijedi

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

Dokazati.

10.61. U sferu radijusa r upisan je obrtni konus. Treba odrediti radijus x baze konusa tako da mu zapremina bude najveća.

10.62. U sferu datog radijusa r treba upisati valjak najveće moguće zapremine.

10.63. U uspravni konus date visine h i poluprečnika osnove r treba upisati valjak najveće zapremine. Odrediti poluprečnik x osnove i visinu y valjka.

10.64. Odrediti broj x tako da zbir $\sum_{i=1}^{n} (x - a_i^2)^2$ ima najmanju vrijednost. Ako je $a_i \neq 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ i ako je proizvod $\prod_{i=1}^{n} a_i$ konstantan, čemu je jednaka najmanja moguća vrijednost od x?

10.65. Odrediti najveću vrijednost funkcije f date izrazom

$$f(x) = \log_2^2 x \left(\log_2^2 x + 3 \log_2 \frac{8}{x^2}\right)$$

u intervalu (1,8)?

[1] P. Čebišev (1821—1894) je ruski matematičar.

11. KOMPLEKSNI BROJEVI

11.1. KOMPLEKSNI BROJEVI U OBLIKU PAROVA I U ALGEBARSKOM OBLIKU

Definicija 11.1. Neka su u skupu $R \times R$ uređenih parova realnih brojeva dvije operacije, koje ćemo označiti sa $+$ odnosno $\cdot$ i zvati *sabiranje* odnosno *množenje*, definisane formulama:

$$(\forall\ a, b, c, d \in R) \qquad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{11.1}$$

$$(\forall\ a, b, c, d \in R) \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{11.2}$$

Skup $R \times R = \{(x, y) : x, y \in R\}$ u kome su definisane operacije $+$ i $\cdot$ kao u (11.1) i (11.2) zove se skup *kompleksnih brojeva* i, najčešće, označava sa C, a njegovi elementi zovu se *kompleksni brojevi*. Njih ćemo označavati jednim slovom: $z, w; z_1, z_2, \ldots$.

Dakle, kompleksne brojeve definišemo kao uređene parove $z = (x, y) \in \in R \times R$ realnih brojeva koje sabiramo i množimo po definicijama (11.1 i 11.2). Primijetimo da kompleksne brojeve izjednačavamo po definiciji jednakosti za uređene parove, tj.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d). \tag{11.3}$$

Na osnovu (11.1), (11.2) i aksioma za sabiranje i množenje u skupu R, lako se provjeri da je $(C, +, \cdot)$ polje (vidjeti zad. 11.16). Pri tome je kompleksni broj $(0, 0)$ neutralni element za sabiranje, $-(x, y) = (-x, -y)$, $(1, 0)$ jedinični element, dok je

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \text{ za } (x, y) \neq (0, 0).$$

U skupu C ne uvodi se uređaj $\leqslant$ (mada je lako uvesti parcijalni uređaj).

Obratimo sada pažnju na kompleksne brojeve $(x, 0)$ kod kojih je druga komponenta jednaka nuli. Skup svih ovih brojeva označimo sa R'. Lako se zaključuje da je R' polje u odnosu na operacije „$+$" i „$\cdot$" u skupu C. Kako je $R' \subset C$ i $(C, +, \cdot)$ polje, to je $(R', +, \cdot)$ potpolje polja $(C, +, \cdot)$. Nadalje, očito slijedi da je preslikavanje $f : R \to R'$ dato sa

$$(\forall\ x \in R) \quad f(x) = (x, 0),$$

izomorfizam polja $(R, +, \cdot)$ i $(R', +, \cdot)$, tj. potpolje $R' \subset C$ je izomorfno polju realnih brojeva R (vidjeti def. 6.6).

Budući da u izomorfnim skupovima svi stavovi koji se odnose na odgovarajuće operacije (u odnosu na koje su ti skupovi izomorfni) važe istovremeno u jednom i drugom skupu, a da za algebru priroda samih elemenata i operacija nema nikakva značaja, to se polja $(R, +, \cdot)$ i $(R', +, \cdot)$ mogu identificirati stavljajući

$$(\forall\, x \in R) \quad (x, 0) = x. \tag{11.4}$$

tj. ne čineći više razlike između kompleksnih brojeva oblika $(x, 0)$ i realnih brojeva. Prema tome, imamo $R \subset C$, $(x, 0) = x$, specijalno $(0, 0) = 0, (1, 0) = 1$. Zbog toga kompleksne brojeve $(x, 0)$ zovemo *realnim brojevima*. Sve ostale kompleksne brojeve, tj. elemente $(x, y) \in C \setminus R$, zovemo *imaginarnim brojevima*.

Kompleksne brojeve kod kojih je prva komponenta jednaka 0, tj. elemente $(0, y) \in C$ $(y \neq 0)$ zovemo *čisto imaginarnim brojevima*. Specijalno, element $(0, 1) \in C$ zovemo (po tradiciji) *imaginarna jedinica* i označavamo sa i (ili j), tj. po definiciji je

$$(0, 1) = i. \tag{11.5}$$

Prema (11.2), (11.4) i (11.5) je

$$(\forall\, y \in R) \quad (0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0) = i \cdot y,$$

a otuda, budući da je, prema (11.1), $(x, y) = (x + 0, 0 + y) = (x, 0) + (0, y)$, nalazimo

$$(\forall\, (x, y) \in C) \quad (x, y) = x + iy,$$

što predstavlja *algebarski oblik* (tzv. *standardni oblik*) kompleksnog broja.

Kod kompleksnog broja $z = (x, y) = x + iy$ broj x zove se *realni dio* a y *imaginarni dio* (*komponenta*) kompleksnog broja z i piše se

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Prema (11.4), (11.2) i (11.3) je

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1,$$

tj.

$$i^2 = -1.$$

Primjedba 11.1. Budući da je sabiranje i množenje kompleksnih brojeva asocijativno i komutativno, a množenje je distributivno prema sabiranju i da u svakom kompleksnom broju (x, y) napisanom u obliku binoma $x + iy$ su x, i, iy, y također kompleksni brojevi, to se sa kompleksnim brojevima napisanim u algebarskom obliku mogu vršiti operacije sabiranja i množenja po pravilima operacija sabiranja i množenja monoma i binoma u skupu R, samo umjesto i^2, treba staviti -1. Tako imamo:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) = (a + c, b + d),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + ibc + iad + i^2 bd =$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc) = (ac - bd, ad + bc).$$

Prema tome, pravila za formiranje *zbira* i *proizvoda* u definiciji 11.1. nije potrebno više posebno pamtiti.

Količnik $\dfrac{a + ib}{c + id}$ kompleksnih brojeva može se naći polazeći od definicije količnika, tj. da je količnik $(a + ib) : (c + id)$, $(c + id \neq 0)$, *broj* $x + iy$ takav da je $(c + id)$

$(x + iy) = a + ib$. Međutim, pošto u tijelu važi jednakost $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2 \cdot z_3}$, $(z_2 \neq 0, z_3 \neq 0)$, to vrijednost $\frac{z_1}{z_2}$ možemo odrediti i na slijedeći način:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}, \tag{11.6}$$

tj. tako da se u nazivniku „oslobodimo" imaginarnog broja $c + id$ i to postupkom koji je sličan racionalisanju nazivnika.

Definicija 11.2. Neka je $z = x + iy$ $(x,y \in R)$ kompleksan broj. Tada za broj $\overline{z} = x - iy$ kažemo da je *konjugovan* (*konjugiran*) ili *spregnut kompleksan broj* broju z.

Primijetimo da iz ove definicije slijedi da je i broj z konjugovan broju $\overline{z}$. Otuda je $\overline{(\overline{z})} = z$, tj. *operacija konjugovanja* (tj. preslikavanje koje svakom $z = x + iy \in C$ dodjeljuje $\overline{z} = x - iy \in C$) je *involutivna*.

Lako se vidi da operacija konjugovanja ima i ova svojstva:

1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
4. $\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $(z_2 \neq 0)$.

Proizvod $z \cdot \overline{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$ uvijek je realan broj i $z \cdot \overline{z} \geqslant 0$, pa je kompleksnim brojem z potpuno određen realan broj $r = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \geqslant 0$.

Definicija 11.3. Realan nenegativan broj $\sqrt{x^2 + y^2}$ zove se *apsolutna vrijednost* ili *modul* kompleksnog broja $z = x + iy$ $(x, y \in R)$ i označava se sa $|z|$, tj.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Specijalno, ako je z realan, tj. ako je $y = 0$, onda je $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Očigledno je

$$(\forall\, z \in C) \quad |z| \geqslant 0;\ |\overline{z}| = |z|;\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \text{ tj. } |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}},$$

a lako se vidi da vrijede i svojstva:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (z_2 \neq 0). \tag{11.7}$$

Primjer 11.1. Odredimo modul kompleksnog broja

$$z = \frac{18 - i}{2 - 3i}.$$

Da bi se odredio modul $\sqrt{x^2 + y^2}$ kompleksnog broja $x + iy$, neophodno je prethodno odrediti komponente x i y. Iz definicije količnika slijedi da treba odrediti kompleksni broj $z = x + iy$ za koji vrijedi jednakost

$$(2 - 3i) \cdot (x + iy) = 18 - i.$$

Zato, prema pravilu množenja u skupu C imamo:

$$(2x + 3y) - i\,(3x - 2y) = 18 - i,$$

a odavde, prema definiciji jednakosti kompleksnih brojeva, slijedi:

$$2x + 3y = 18 \wedge -(3x - 2y) = -1.$$

tj.

$$x = 3 \wedge y = 4.$$

Prema tome, količnik je $z = 3 + 4i$, pa je njegov modul

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Napomenimo da komponente x i y količnika $\dfrac{18 - i}{2 - 3i}$ možemo naći i prema (11.6), tj. da nazivnik i brojnik ovog količnika pomnožimo brojem konjugovanim nazivniku:

$$z = \frac{18 - i}{2 - 3i} = \frac{18 - i}{2 - 3i}\cdot\frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{(36 + 3) + (54 - 2)i}{4 + 9},$$

$$z = \frac{39}{13} + \frac{52}{13}i = 3 + 4i.$$

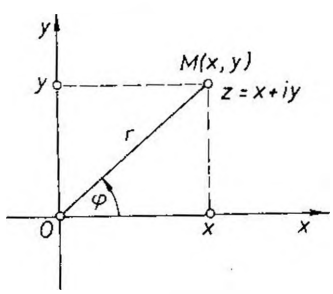
Međutim, možemo i kraće naći modul od z ako primijetimo svojstvo modula količnika (dato u (11.7)):

$$|z| = \frac{|18 - i|}{|2 - 3i|} = \frac{\sqrt{324 + 1}}{\sqrt{4 + 9}} = \sqrt{\frac{325}{13}} = \sqrt{25} = 5.$$

Kompleksnom broju $z = (x, y)$ $(= x + iy)$ pridružuje se u pravouglom koordinatnom sistemu xOy tačka $M(x, y)$ (tačka M zove se slika broja z, dok se broj z zove *afiks* tačke M), čime se uspostavlja bijekcija skupa C na ravan xOy. Tačku $M(x, y)$ koja odgovara kompleksnom broju $z = x + iy$ identifikujemo sa tim brojem, pa govorimo o tački z. Ravan xOy na koju su na opisan način preslikani kompleksni brojevi zove se *kompleksna* ili *Gausova* (Gauss) ravan. Specijalno, realni brojevi $z = (x, 0) = x$ preslikavaju se na prvu koordinatnu osu (x-osu), koja se zbog toga sada zove *realna osa*, a čisto imaginarni brojevi $z = (0, y) = iy$ preslikavaju se na drugu koordinatnu osu (y-osu), koja se zbog toga zove *imaginarna osa*.

Takođe, svakoj tački $M(x, y)$ kompleksne ravni odgovara vektor položaja (radijus-vektor) $\vec{OM}$ tačke M, tj. svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara tačno jedan vektor $\vec{OM}$ i obratno. Dužina $|\vec{OM}|$ radijus-vektora $\vec{OM}$ koji odgovara broju $z = x + iy$ $(x, y \in R)$, prema slici 11.1, jednaka je, očigledno, $\sqrt{x^2 + y^2}$. Otuda imamo

$$|z| = |\vec{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Sl. 11.1.

Zadaci (11.1—11.18)

11.1. Izvršiti naznačene operacije:

a) $(2 + 3i) + (-4 - 2i)$; b) $(7 - 4i) - \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}i\right)$;

c) $\left(\frac{1}{3} - 2i\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{4}i\right)$; d) $(2 - 3i) : (1 + i)$.

11.2. Pokazati da vrijede sljedeće jednakosti:

a) $\frac{5 - \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{2}i} = 1 - 2\sqrt{2}i$;

b) $(1 - 3i) : (1 + i) - i : (2 + i) = -\frac{6}{5} - \frac{12}{5}i$.

11.3. Rastaviti na kompleksne faktore sljedeće izraze:

a) $4 + a^2$; b) $3 + b^4$; c) $a + b$, $(a > 0, b > 0)$.

11.4. a) Data je funkcija

$$f : N \to C, f(n) = i^n.$$

Dokazati da je $f(N) = \{-i, -1, i, 1\}$.

b) Izračunati:

$$i^7 + i^{13} + (-i)^{21}; (2 - 3i)^2 - 7i^{40}.$$

11.5 Dokazati da je:

a) $(1 + i)^6 = -8i$; b) $(1 + i\sqrt{3})^6 = 64$.

11.6. Odrediti kompleksni broj $z = x + yi$ za koji je tačna jednakost

$$|z| + z = 2 + i.$$

11.7. Naći sve kompleksne brojeve z za koje je $\bar{z} = z^3$, gdje je $\bar{z}$ broj konjugovan broju z.

11.8. Dat je kompleksan broj $z = x + iy$, $z \neq \pm 1$. Dokazati da je broj $\frac{z - 1}{z + 1}$ čisto imaginaran ako i samo ako je $|z| = 1$.

11.9. Odrediti najmanju vrijednost izraza $\left|z - \frac{1}{z}\right|$, $z \in C$, ako je $|z| = 2$. Odrediti tada broj z.

11.10. Težište jednakostraničnog trougla je u ishodištu koordinatnog sistema, a jedan mu je vrh u tački (0,1). Odrediti kompleksne brojeve koji odgovaraju ostalim vrhovima toga trougla.

11.11. U kružnicu poluprečnika $r = 1$ i središta u koordinatnom početku upisan je pravilni šestougaonik čiji je vrh

a) na osi x, b) na osi y.

Odrediti kompleksne brojeve koji su pridruženi vrhovima šestougla.

11.12. Odrediti u ravni koordinatnog sistema xOy skup svih tačaka $T(x, y)$ za koje je:

a) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$; b) $|z-1| \leqslant 1$; c) $|z-2| + |z+2| = 5$,

gdje je $z = x + iy$.

11.13. Neka kompleksnom broju $z = x + yi$ odgovara u koordinatnom sistemu tačka M, a kompleksnom broju $z_1 = \dfrac{z+1}{z-1}$ tačka N. Ako tačka M opisuje pravu $y = -x + 1$, koji skup tačaka opisuje pri tome tačka N?

11.14. Dokazati grafički i računom da za kompleksne brojeve z_1 i z_2 važe formule:

a) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; b) $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$.

11.15. Odrediti kompleksne brojeve z za koje važe uslovi:

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \text{ i } \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

Zatim odrediti površinu paralelograma čije su dvije stranice određene radijvektorima koji odgovaraju nađenim brojevima z.

11.16. Dokazati da skup C kompleksnih brojeva ima strukturu polja.

11.17. Dokazati da skup $H = \{1, i, -1, -i\}$ obrazuje grupu u odnosu na operaciju množenja kompleksnih brojeva.

11.18. Dat je skup $S = \{z \in C : |z| = 1\}$, gdje je C skup kompleksnih brojeva. Treba dokazati da je $(S, \cdot)$ komutativna grupa, ako je operacija $\cdot$ množenje kompleksnih brojeva.

11.2. KOMPLEKSNI BROJEVI U TRIGONOMETRIJSKOM I U EKSPONENCIJALNOM OBLIKU

Položaj tačke $M(x, y)$ koja predstavlja kompleksni broj $z = x + iy$, $(z \neq 0)$, određen je takođe i takozvanim polarnim koordinatama r i φ, gdje je $r = |\vec{OM}| = |z|$ dužina radijus-vektora $\vec{OM}$, a φ je orijentisani ugao $(x, \vec{OM})$ koji čini vektor $\vec{OM}$ sa osom Ox (sl. 11.1.).

Kako su kosinus i sinus ugla $(x, \vec{OM})$, odnosno mjernog broja φ ovog ugla dati formulama

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \tag{11.8}$$

to imamo

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{11.9}$$

Izraz (11.9) zovemo *trigonometrijskim oblikom* kompleksnog broja z.

Ako formalno stavimo

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

tj. specijalno

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

onda se izraz (11.9) može napisati u obliku

$$z = re^{i\varphi}. \tag{11.10}$$

Izraz (11.10) zove se *eksponencijalni oblik* kompleksnog broja. Izraz $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, kojim smo zapravo *definisali* $e^{i\varphi}$, može se *dokazati*, ako se e^z definiše na (neki drugi) podesan način. Tada taj izraz predstavlja tzv. *Ojlerovu* (*Euler*) formulu.

Definicija 11.4. Neka je $M(x, y)$ tačka koja predstavlja kompleksni broj $z = x + iy$, $(z \neq 0)$. Svaki mjerni broj φ orijentisanog ugla $(x, \vec{OM})$ koji čini radijus-vektor $\vec{OM}$ sa osom Ox, tj. svaki realni broj φ određen pomoću (11.8) zove se *argument* (ili arkus ili amplituda) broja z, i označava se sa $\operatorname{Arg} z$ (ili Arc z ili Amp z). Argument φ broja z koji zadovoljava uslov $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ zove se *glavna vrijednost argumenta* broja z i označava se sa $\arg z$ (ili arc z ili amp z).

Uglu $(x, \vec{OM})$ pripada tačno jedan mjerni broj φ_0 koji se nalazi u razmaku $(-\pi, \pi]$, dok se svi ostali mjerni brojevi φ ugla $(x, \vec{OM})$ dobiju po formuli

$$\varphi = \varphi_0 + 2k\pi, \quad (k \in Z).$$

Dakle, broj $\varphi = \operatorname{Arg} z$ je određen samo za $z \neq 0 = 0 + i0$ i to samo do aditivne konstante $2k\pi$, dok je broj $\arg z$ potpuno određen brojem z $(z \neq 0)$ i važi

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \quad (k \in Z),$$

tj. simbol $\operatorname{Arg} z$ ima beskonačno mnogo vrijednosti.

Za glavnu vrijednost argumenta $\arg z$ može se uzeti, umjesto uslova $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, uslov $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, budući da u tom razmaku svakom uglu $(x, \vec{OM})$ odgovara tačno jedna određena vrijednost.

U slučaju $z = 0$, imamo da je $r = |z| = 0$, a ugao $(x, \vec{OM})$ ne postoji. Međutim, kako se može napisati $z = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdje je φ potpuno proizvoljno, to se i za broj 0 može napisati trigonometrijski oblik (11.9). Argument broja 0 je neodređen.

Glavna vrijednost argumenta broja $z = x + iy$ data je (u slučaju kada se uzima varijanta $-\pi < \arg z \leqslant \pi$) sa:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}, & (x > 0), \\ \pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}, & (x < 0 \wedge y > 0), \\ -\pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}, & (x < 0 \wedge y < 0), \\ \dfrac{\pi}{2}, & (x = 0 \wedge y > 0), \\ -\dfrac{\pi}{2}, & (x = 0 \wedge y < 0), \\ \pi, & (x < 0 \wedge y = 0). \end{cases} \tag{11.11}$$

[1] $\operatorname{arc\,tg} x$ je broj (luk, ugao mjeren radijanima) iz intervala $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, čiji tangens je jednak x, tj. $y = \operatorname{arc\,tg} x \Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} y = x \wedge -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Primjer 11.2. Nađimo argument kompleksnog broja $z = -1 - i$ i napišimo ga u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku.

Prema definiciji modula imamo:

$$r = |z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Kako tačka $z = -1 - i$ pripada trećem kvadrantu i kako je

$\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, to, prema 11.11, imamo:

$$\arg z = -\pi + \operatorname{arc\,tg}\,1 = -\frac{3\pi}{4};$$

$$\mathrm{Arg}\,z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Za broj φ možemo uzeti bilo koji od brojeva $-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $(k \in Z)$. Tako, npr., uzimajući $k = 0$, odnosno $k = 1$, dobijemo

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Prema (11.10), eksponencijalni oblik datog kompleksnog broja z je

$$z = \sqrt{2}\,e^{i\,5\pi/4}.$$

Napomenimo da su jednakost, proizvod i količnik kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku dati sa:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (|z_1| = |z_2| \wedge \mathrm{Arg}\,z_1 = \mathrm{Arg}\,z_2 + 2k\pi,\ (k \in Z)),$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\,[\cos(\mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2) + i\sin(\mathrm{Arg}\,z_1 + \mathrm{Arg}\,z_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2) + i\sin(\mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2)].$$

Pomoću matematičke indukcije i koristeći se formulama $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$ i $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^0 \overset{\mathrm{def.}}{=} 1$, dobijemo tzv. *Moavrovu* (*Moivre*) *formulu*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \tag{11.12}$$

za svako $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Primjenom formule (11.12) dobijemo relaciju za stepenovanje:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Primjer 11.3. Riješimo tzv. *binomnu* jednačinu

$$z^n = a, \quad (n \in N,\ a \in C). \tag{11.13}$$

1° Uzimajući broj a $(a \neq 0)$ u trigonometrijskom obliku $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i tražeći za broj z trigonometrijski oblik $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, nalazimo da je

$$R = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ (k \in Z).$$

Rješenja jednačine (11.13) date su formulama

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (*)$$

($\sqrt[n]{r}$ je aritmetička vrijednost korijena).

Kako svaki cio broj k (prema teoremi 8.2) možemo napisati u obliku $k = nq + m$, gdje je $q \in Z$, $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, to, uzimajući za k proizvoljan cio broj, imamo

$$0 = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} + 2q\pi,$$

pa će kosinus i sinus ove vrijednosti biti jednaki kosinusu, odnosno sinusu od $\frac{\varphi + 2m\pi}{n}$.

Osim toga, primijetimo da su sve vrijednosti $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ među sobom različite. Naime, ako to ne bi bilo istinito, onda bi postojala dva različita indeksa k, $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ za koje je $z_k = z_m$, tj. $\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2m\pi}{n} + 2q\pi$, odnosno $\frac{k-m}{n} = q (q \in Z)$. Kako je $0 \leqq k - m < n$ i $q \in Z$, to posljednja jednakost ne može vrijediti, pa izlazi da su sva rješenja $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ jednačine (11.13) među sobom različita. Prema tome, ima svega n različitih vrijednosti za z u (11.13) datih sa (*) za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ako sa $\sqrt[n]{a}$ označimo svaki broj čiji je n-ti stepen jednak a, onda je

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (11.14)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Broj z_0 zove se *glavna vrijednost* korijena $\sqrt[n]{a}$.

2^0 Ako je $a = 0$, jednačina (11.13) ima jedino rješenje $z = 0$, čija je višestrukost n, odnosno $\sqrt[n]{0}$ ima svega jednu vrijednost 0.

Primjedba 11.2. Neke od jednakosti za aritmetičke korijene važe i za korijene u skupu kompleksnih brojeva, samo ako se relacija jednakosti izraza (budući da $\sqrt[n]{a}$, za $a \neq 0$, ima n vrijednosti u C) razumije tako da je svaka vrijednost s jedne strane jednaka jednoj vrijednosti s druge i obratno, tj. da se *skupovi vrijednosti* s jedne i druge strane jednakosti podudaraju. U tom smislu važe sljedeće jednakosti:

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ $(b \neq 0)$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;
2. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, samo ako su n i m relativno prosti (u ovom slučaju se definiše $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$);
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$ (važi uvijek, po samoj definiciji);
4. $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[s]{a^p \cdot b^q}$, gdje je s najmanji zajednički sadržalac brojeva m, n, tj. $s = m \cdot p$, $s = n \cdot q$, p i q relativno prosti.

Napomenimo da jednakosti $\sqrt[n]{a^n} = a (n \in N \setminus \{1\})$ i $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$ $(p,\ n \in N,$ $p \neq 1)$ ne važe (jer kod prve jednakosti lijeva strana ima n vrijednosti, a desna jednu; dok kod druge jednakosti lijeva strana ima n, a desna pn vrijednosti). Treba također imati u vidu da je $\sqrt{-1} = \pm i$ (a ne $\sqrt{-1} = i$); dakle, jednačina $x^2 = -1$ u C ima dva rješenja $\pm i$.

Zadaci (11.19—11.32)

11.19. Odrediti argument kompleksnih brojeva:

$z_1 = i,\ z_2 = -6i,\ z_3 = 1 + i\sqrt{3},\ z_4 = -1 + i,\ z_5 = \sqrt{3} - i.$

11.20. Predstaviti u trigonometrijskom i u eksponencijalnom obliku kompleksne brojeve:

a) $1 - i\sqrt{3}$; b) $\dfrac{1 - 3i}{i + 1} - \dfrac{i}{i + 2}$.

11.21. Napisati u eksponencijalnom obliku kompleksne brojeve:

a) $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$; b) $z = 1 + i\operatorname{tg}\alpha$; c) $z = \dfrac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}$.

11.22. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 - i,\ z_3 = -1 + i\sqrt{3}$ i $z_4 = -1 - i\sqrt{3}$.

a) Napisati date kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku.

b) Izračunati z_1^{16}, z_2^{20}, z_3^{15} i z_4^{15}.

c) Izračunati $z_1 \cdot z_3$ i $\dfrac{z_4}{z_2}$.

Izračunati $z_1^3 \cdot z_2^6$ i $\dfrac{z_3^{15}}{z_2^{20}} + \dfrac{z_4^{15}}{z_1^{20}}$.

11.23. Neka je $z = \alpha + \sqrt{1 - \alpha^2}$, $\alpha > 1$. Odrediti α tako da bude $\arg z = \dfrac{\pi}{6}$.

11.24. Znajući da je $\arg(1 + z) = \dfrac{\pi}{4}$ i $|1 + z| = 4$, odrediti kompleksni broj z.

11.25. Odrediti tačke u kompleksnoj ravni za koje je:

a) $2 < |z| < 3,\ \dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{3}$;

b) $0 < \arg\dfrac{z - i}{z + i} < \dfrac{\pi}{4},\ (z \neq i)$.

11.26. Koristeći Moavrov obrazac, dokazati jednakosti:

a) $\sin nx = \binom{n}{1}\cos^{n-1} x \sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-3} x \sin^3 x +$

$+ \binom{n}{5}\cos^{n-5} x \sin^5 x - \ldots$;

b) $\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x -$

$- \binom{n}{6}\cos^{n-6} \sin^6 x + \ldots .$

11.27. a) Ako je za neki kompleksni broj z

$$(*) \quad z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha,$$

naći sumu $z^n + \frac{1}{z^n}$ u zavisnosti od $\cos\alpha$, za bilo koji cijeli broj n.

b)* Koristeći sumu $S = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi}$, naći sume:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi \text{ i } S_2 = \sum_{k=1}^{n} \sin k\varphi.$$

11.28. Koristeći Moavrovu formulu i Njutnovu binomnu formulu, izraziti $\cos 5x$ i $\sin 5x$ pomoću stepena od $\cos x$ i $\sin x$ i obrnuto, izraziti $\cos^5 x$ i $\sin^5 x$ preko trigonometrijskih funkcija višestrukih uglova.

11.29. Naći sve vrijednosti $\sqrt[n]{-1}$ i izraziti ih pomoću vrijednosti $\sqrt[n]{1}$. Za $n = 4$ nacrtati sve vrijednosti datih korijena. Napisati faktorizaciju polinoma $x^5 - 1$ u skupu R.

11.30. Riješiti jednačine:

a) $x^3 - 8 = 0$; b) $x^6 + 64 = 0$; c) $z^3 + 2 - 2i = 0$;

d) $(\cos 2x + i\sin 2x)^3 + (\cos x + i\sin x)^2 - 2 = 0$, $(x \in R)$.

11.31. Naći sve vrijednosti kompleksnog broja z koje zadovoljavaju jednačinu

a) $(1 + i\sqrt{3})^3 = \frac{9}{4}(z^3 + i^{23}\sqrt{3})\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4$;

b) $(1 + i)(z + 1)^4 = \frac{(1 - i)^5 - \operatorname{Re}\{(1 - i)^5\}}{1 + i}$.

11.32. Izračunati sljedeće korijene:

a) $\sqrt[3]{-1 + i\sqrt{3}}$; b) $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$;

c)* $\sqrt{\max\left\{|z| : z \in C \wedge \left|z + \frac{1}{z}\right| = 1\right\}}$.

12. LINEARNE JEDNAČINE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

12.1. EKVIVALENTNOST JEDNAČINE. LINEARNE JEDNAČINE

Posmatrajmo izraze $f(x)$ i $g(x)$ u istoj brojevnoj oblasti varijable x u kojoj su oba izraza definisana.

Definicija 12.1. Predikat

$$f(x) = g(x)$$

zovemo *jednačina*. Svaku vrijednost varijable $x = a$ za koju predikat $f(x) = g(x)$ postaje tačna brojevna jednakost

$$f(a) = g(a)$$

zovemo *rješenje* ili *korijen* jednačine.

Rješenje, naravno, mora pripadati definicionom podučju jednačine (koje je presjek definicionih područja svih izraza koji se nalaze u datoj jednačini).

Definicija 12.2. Za jednačine J_1 i J_2 kažemo da su u nekom brojevnom području *ekvivalentne* ako su im sva rješenja iz tog područja zajednička. Drugim riječima, one su ekvivalentne u datom području ako je svako rješenje jednačine J_1 iz tog područja rješenje i jednačine J_2 (tada kažemo da je druga jednačina posljedica prve) i obrnuto, ako je svako rješenje jednačine J_2 rješenje jednačine J_1 (tj. ako je prva jednačina posljedica druge).

Ako, na primjer, jednačine

$$J_1 : x^3 + 1 = 0 \text{ i } J_2 : x + 1 = 0$$

posmatramo i rješavamo u skupu C kompleksnih brojeva, one nisu ekvivalentne, jer rješenja $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ jednačine J_1 nisu rješenja jednačine J_2. One su, međutim, ekvivalentne u skupu R realnih brojeva, jer u R obje imaju isto rješenje $x = -1$.

Za jednačine

$$J_1 : x - 1 = 0 \quad \text{i} \quad J_2 : x^2 - 2x + 1 = 0, \quad \text{tj. } (x-1)^2 = 0$$

uzimamo, po dogovoru, da nisu ekvivalentne, mada imaju isto rješenje $x = 1$. Jednačina J_2 je, naime, drugog stepena, pa ona ima dva rješenja koja su jednaka, tj. dvostruko rješenje $x = 1$.

Jednačinu rješavamo tako što je zamjenjujemo jednostavnijim, ali ekvivalentnijim jednačinama, sve dok ne dobijemo takozvani riješeni oblik jednačine, iz koga neposredno pročitamo rješenje. Pri tome vrijede sljedeće teoreme.

Teorema 12.1. Jednačine

$$f(x) = g(x) \text{ i } f(x) \pm h(x) = g(x) \pm h(x)$$

su ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definisan u definicionom području prve jednačine. Čak je dovoljno da je izraz $h(x)$ definisan samo za sva rješenja prve jednačine. Izraz $h(x)$ može biti i proizvoljna konstanta.

Ova teorema je posljedica ekvivalencije

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

u skupu R realnih (i u skupu C kompleksnih) brojeva.

Primjer 12.1. a) Jednačine

$$3x - 4 = 3 - 2x \text{ i } (3x - 4) + (2x + 4) = (3 - 2x) + (2x + 4)$$

su ekvivalentne. Dodavanje izraza $h(x) = 2x + 4$ vodi nas na poznato pravilo o "prenošenju" poznatih članova na jednu a nepoznatih na drugu stranu znaka $=$, nakon čega se dobije jednostavnija jednačina

$$3x + 2x = 3 + 4$$

koja je ekvivalentna datoj jednačini. Odavde se dobije riješeni oblik

$$x = \frac{7}{5}$$

date jednačine.

b) Jednačine

$$2x - 1 = x \quad \text{i} \quad (2x - 1) + \frac{1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$$

nisu ekvivalentne, jer dodani izraz $h(x) = \frac{1}{x - 1}$ nije definisan upravo za rješenje $x = 1$ prve jednačine, pa $x = 1$ nije rješenje druge jednačine.

Teorema 12.2. Jednačine

$$f(x) = g(x) \quad \text{i} \quad f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$$

su ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definisan u definicionom području prve jednačine, odnosno za njena rješenja, i ako je $h(x) \neq 0$. Izraz $h(x)$ može biti i proizvoljna konstanta različita od 0.

Primjer 12.2. Jednačine

$$2x - 1 = x \quad \text{i} \quad (2x - 1)(x + 2) = x(x + 2)$$

nisu ekvivalentne, jer izraz $h(x) = x + 2$ prima vrijednost 0 i to za $x = -2$. Vrijednost $x = -2$ je rješenje druge, ali nije rješenje prve jednačine.

Ako drugu jednačinu podijelimo sa $x + 2$ dobijemo prvu jednačinu, ali smo time izgubili rješenje $x = -2$ druge jednačine, pa jednačine nisu ekvivalentne.

Prema tome, množenjem jednačine izrazom koji može biti jednak 0 uvlačimo strana rješenja, ili povećavamo višestrukost rješenja date jednačine. Dijeljenjem jednačine takvim izrazom gubimo neka rješenja ili smanjujemo višestrukost rješenja date jednačine.

Pitanje: Zašto su jednačine

$$\frac{x}{x-3} = 5 \quad \text{i} \quad \frac{x}{x-3}\cdot(x-3) = 5(x-3)$$

ekvivalentne?

Napominjemo da je teorema 12.2. posljedica osobine

$$a = b \Leftrightarrow ac = bc, \text{ za } c \neq 0.$$

Primjer 12.3. Riješimo linearnu jednačinu sa jednom nepoznatom x:

$$ax + b = 0, \quad a, b \in R.$$

Rješenje. Primjenom teoreme 12.1, datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$ax = -b, \tag{1}$$

pa imamo:

a) Ako je $a \neq 0$, tada je rješenje jednačine (1)

$$x = -\frac{b}{a}$$

$\left(\text{množili smo, na osnovu teoreme 12.2, jednačinu (1) sa } \frac{1}{a}\right)$.

b) Ako je $a = 0$ i $b = 0$, jednačina (1) ima oblik

$$0 \cdot x = 0,$$

i njena su rješenja svi realni brojevi. Za takvu jednačinu kažemo da je *neodredena*.

c) Ako je $a = 0$ i $b \neq 0$, tada jednačina (1) nema rješenja i kažemo da je ona *protivrječna*.

Zadaci (12.1—12.17)

12.1. Objasniti zašto su jednačine

$$x - 1 = 0 \text{ i } x^3 - 1 = 0$$

u skupu R ekvivalentne, a u skupu C kompleksnih brojeva nisu.

12.2. Objasniti zašto su u skupu R ekvivalentne sljedeće jednačine:

a) $2x - 1 = x + 2 \quad \text{i} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{3x-1}{4}$;

b) $2x + 1 = x \quad \text{i} \quad \frac{2x+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$.

12.3. Obrazložiti zašto sljedeće jednačine nisu ekvivalentne:

a) $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=0$ i $\frac{x-1}{x+1}=0$;

b) $2x+1=x$ i $2x+1+\frac{2x}{x+1}=x+\frac{2x}{x+1}$;

c) $2x+1=x$ i $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$;

d) $(x-1)(x+2)=5(x-1)$ i $x+2=5$.

12.4. Odrediti vrijednost parametra m tako da jednačina

a) $m(mx-5)=50(2x+1)$; b) $8(4x-5m)=m(2mx+m-1)$,

bude određena (tj. da ima jedno i samo jedno rješenje).

12.5. Odrediti one vrijednosti parametra a za koje jednačina

$$a^2x+a+4x=2+4ax$$

nema rješenja.

Riješiti sljedeće jednačine:

12.6. $\frac{x}{x-2}-\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x^2}{4-x^2}$.

12.7. $(a^2-b^2)x=a-b$.

12.8. $\frac{2}{3}a^3x-a^2=1-\frac{2x+3a}{3}$.

12.9. $|x-1|-|x+2|=1$.

12.10. $\frac{|x-3|}{2}-(2x+1)=\frac{|x-3|}{3}+2$.

12.11. $|x+1|-|2x-3|=2$.

12.12. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$.

12.13. a) $|2x+1|+|x+3|=|x+6|$;

b) $|x-2|+|x+1|=|2x+3|$;

c) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$.

12.14. $||3-2x|+2|=x$.

12.15. $||2x-3|-x+1|=4x-1$.

12.16. Riješiti jednačinu $f(x)+f(1-x)=1$ po nepoznatoj x, ako je

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{za } x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-x & \text{za } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

12.17.* Naći sve vrijednosti $a \in R$ za koje jednačina

$$a^3 + a^2|a + x| + |a^2x + 1| = 1$$

ima najmanje četiri (različita) rješenja po nepoznatoj x u skupu cijelih brojeva.

12.2. SISTEM OD DVIJE LINEARNE JEDNAČINE SA DVIJE NEPOZNATE

Za skup jednačina kažemo da čine sistem ako nas interesuju zajednička rješenja svih jednačina toga skupa. Za dva sistema jednačina kažemo da su ekvivalentna ako imaju iste skupove rješenja.

Opšti oblik sistema od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate izgleda ovako:

$$S: \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{array}$$

Ovdje su $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ i $c_{1,2}$ proizvoljni realni brojevi (koeficijenti), a nepoznate x i y također pripadaju skupu R. Rješenje sistema je svaki uređeni par $(x, y) \in R^2$ za koji, nakon uvrštavanja u sistem, obje jednačine sistema postanu tačne brojevne jednakosti.

Sistem jednačina rješavamo tako što ga zamjenjujemo ekvivalentnim a jednostavnijim sistemima. Najopćenitija metoda rješavanja je Gausova metoda[1] o kojoj govori teorema 12.3. Ako u sistemu S "prebacimo" c_1 i c_2 na lijevu stranu znaka $=$, tada možemo jednačine sistema kratko označiti $f_1(x, y) = 0$ i $f_2(x, y) = 0$.

Teorema 12.3. Sistemi jednačina

$$S: \begin{array}{ll} (1) & f_1(x, y) = 0, \\ (2) & f_2(x, y) = 0 \end{array}$$

i

$$S_1: \begin{array}{ll} (1) & f_1(x, y) = 0, \\ (3) & af_1(x, y) + f_2(x, y) = 0, \end{array}$$

gdje je a proizvoljan realan broj, su ekvivalentni.

Množenik a treba odabrati tako da jednačina (3) sadrži samo jednu nepoznatu. Znači, Gausov postupak sadrži poznatu metodu eliminacije jedne nepoznate. Napomenimo da je nekada pogodnije množiti jednačinu (2) i dodati joj (1), a prepisati jednačinu (2). Znači, uvijek prepisujemo onu jednačinu koju smo množili sa a (tada su sistemi S i S_1 ekvivalentni i za $a = 0$ – ti su sistemi tada isti).

Primjer 12.4. Riješimo Gausovom metodom sistem

$$S: \begin{array}{ll} (1) & ax - by = 0, \\ (2) & a^2x - b^2y = a - b. \end{array}$$

Rješenje. Na osnovu teoreme 12.3. sistem S ekvivalentan je sistemu

$$S_1: \begin{array}{ll} (1) & ax - by = 0, \\ (3) & (1)\cdot(-b) + (2): \quad a(a - b)x = a - b. \end{array}$$

[1] Gaus (Karl Friedrich Gauss) – veliki njemački matematičar i fizičar (1777—1855).

a) Ako je $a \neq 0$ i $a \neq b$, iz jednačine (3) slijedi da je

$$x = \frac{1}{a},$$

a nakon zamjene $\frac{1}{a}$ umjesto x iz jednačine (1) sistema S_1 dobijemo jednačinu

(4) $\qquad by = 1.$

1° Ako je $b \neq 0$, iz jednačine (4) slijedi

$$y = \frac{1}{b}.$$

2° Ako je $b = 0$, jednačina (4) nema rješenja, pa ga nema ni sistem S_1, tj. ni S.

b) Ako je $a = 0$, $b \neq 0$, jednačina (3) nema rješenja, pa ga nema ni sistem.

c) Ako je $a = b$, nepoznata x u jednačini (3) je proizvoljan realan broj, a iz jednačine (1) slijedi jednačina

(5) $\qquad ay = ax.$

1° Za $a \neq 0$ iz jednačine (5) slijedi da je $y = x$.

2° Za $a = 0$, nepoznate x i y u jednačini (5) su obje proizvoljne.

Rezultat:

Za $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$ sistem ima tačno jedno rješenje $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$. Za sistem kažemo da je *određen*.

Za $a = 0$ i $b \neq 0$ ili za $a \neq 0$ i $b = 0$, sistem nema rješenja, i kažemo da je *protivrječan*.

Za $a = b \neq 0$ jedna nepoznata je proizvoljna, a druga joj je jednaka. Sistem je neodređen.

Za $a = b = 0$, obje nepoznate sistema su proizvoljni realni brojevi, sistem je opet neodređen.

Metoda determinanti

Pođimo ponovo od sistema

$$S: \quad \begin{matrix} (1) & a_1x + b_1y = c_1, \\ (2) & a_2x + b_2y = c_2. \end{matrix}$$

Ako su svi koeficijenti u sistemu jednaki 0, sistem ima beskonačno mnogo rješenja — to je svaki par (x, y) realnih brojeva. Ako su svi koeficijenti uz nepoznate jednaki 0, a $c_1 \neq 0$ ili $c_2 \neq 0$, sistem nema rješenja.

U daljnjem radu uzimamo da je bar jedan od koeficijenata uz nepoznatu različit od 0. Neka je $b_1 \neq 0$. Tada je sistem S ekvivalentan sistemu

$$S_1: \quad \begin{matrix} (1') & y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1}, \quad b_1 \neq 0 \\ (3) & (a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1, \end{matrix}$$

koji se dobije iz sistema S metodom supstitucije (zamjene).

Izraz

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

zovemo *determinanta sistema*, a izraz

$$D_x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

zovemo determinanta za nepoznatu x. Radi lakšeg pamćenja ove determinante pišemo u sljedećem obliku:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Iz oznake za determinantu D izraz $a_1 b_2 - a_2 b_1$ dobijemo ako od proizvoda "po prvoj dijagonali" $a_1 \searrow b_2$ oduzmemo proizvod "po drugoj dijagonali" $a_2 \swarrow b_1$. Tako radimo kod svake determinante drugog reda, tj. determinante koja ima dva retka i dva stupca.

Napišimo sada sistem S_1 u kraćem obliku:

$$S_1': \begin{array}{ll} (1') & y = \dfrac{c_1 - a_1 x}{b_1}, \quad b_1 \neq 0 \\ (3') & D \cdot x = D_x \end{array}$$

Kada bismo nepoznatu y izrazili iz jednačine (2) sistema S, uz pretpostavku da je $b_2 \neq 0$, dobili bismo sistem

$$S_2: \begin{array}{ll} (2') & y = \dfrac{c_2 - a_2 x}{b_2}, \quad b_2 \neq 0 \\ (3') & D \cdot x = D_x \end{array},$$

koji je ekvivalentan sistemu S.

Napomena 12.1. Ako iz jednačine (1), odnosno (2) sistema S izrazimo nepoznatu x, uz uslov da je $a_1 \neq 0$, odnosno $a_2 \neq 0$ i ako taj izraz uvrstimo u preostalu jednačinu toga sistema i sredimo, dobićemo njemu ekvivalentan sistem

$$S_3: \quad x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} \wedge D \cdot y = D_y, \quad a_1 \neq 0,$$

odnosno sistem

$$S_4: \quad x = \frac{c_2 - b_2 y}{a_2} \wedge D \cdot y = D_y, \quad a_2 \neq 0,$$

gdje je

$$D_y = a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Da li sistem S ima ili nema rješenja zavisi, prvenstveno, od toga da li je determinanta sistema $D \neq 0$ ili je $D = 0$, pa ćemo zaključke o tome izvoditi na njemu ekvivalentnom sistemu S_1', odnosno S_2, ali se to može učiniti i na sistemu S_3, odnosno S_4.

1° Ako je $D \neq 0$, tada iz jednačine (3') sistema S_1', odnosno S_2 slijedi da je

$$x = \frac{D_x}{D}.$$

Nakon uvrštavanja ove vrijednosti za x u jednačinu (1') sistema S_1', odnosno u jednačinu (2') sistema S_2 i sređivanja dobijemo

$$y = \frac{D_y}{D},$$

pri čemu je, kako smo napomenuli, $D_y = a_1c_2 - a_2c_1$.

Napomenimo da je sigurno $b_1 \neq 0$ ili $b_2 \neq 0$ ukoliko je $D \neq 0$.

Zaključimo, dakle, sljedeće: ako je determinanta sistema $D \neq 0$, sistem S ekvivalentan je sistemu

$$S_5: \quad D \cdot x = D_x \wedge D \cdot y = D_y,$$

koji ima jedno i samo jedno rješenje

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

Ako je u sistemu S $c_1 = c_2 = 0$, za sistem kažemo da je *homogeni*. Tada je, očito, $D_x = D_y = 0$, pa ako je $D \neq 0$, jedino rješenje homogenog sistema je par (0, 0), za koje kažemo da je očigledno ili *trivijalno rješenje*. Da bi homogeni sistem imao i netrivijalnih rješenja, potrebno je i dovoljno da je determinanta toga sistema $D = 0$, što se lako vidi iz sistema S_5. Ovo vrijedi općenito, tj. važi sljedeća teorema.

Teorema 12.4. Da bi homogeni sistem od n jednačina sa n nepoznatih imao netrivijalnih rješenja, potrebno je i dovoljno da je determinanta sistema jednaka 0. Ta determinanta ima n redaka (vrsta) i n stubaca (kolona) i kažemo da je to determinanta n-tog reda.

Šta slučaj 1^0, tj. slučaj kada je $D \neq 0$ znači grafički? Ako je u obje jednačine sistema S bar jedan od koeficijenata uz nepoznate x i y (a_1 ili b_1, odnosno a_2 ili b_2) različit od 0, tada objema jednačinama u koordinatnom sistemu odgovara po jedna prava. Ako je $D \neq 0$, te se dvije prave sijeku u tački

$$T\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right).$$

2^0 Ako je $D = D_x = 0$, tada je jednačina (3') identitet, tj. nepoznata x je proizvoljan realan broj, a nepoznata y zavisi od x na način koji propisuje jednačina (1'), odnosno (2'). Ako zaključke izvodimo iz sistema S_3, odnosno S_4, vidimo da je nepoznata y proizvoljna, a x zavisi od y.

Šta ovaj slučaj znači grafički? Ograničimo se samo na slučaj kada su svi koeficijenti sistema S_1 različiti od 0. Iz uslova da je $d = d_x = 0$ slijedi da je

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k.$$

Znači, svi odgovarajući koeficijenti sistema su proporcionalni. Vrijedi i obrnuto: ako su svi odgovarajući koeficijenti jednačina sistema proporcionalni, sistem je neodređen.

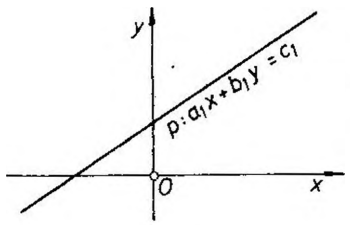
Pošto je sada

$$a_2 = ka_1,\ b_2 = kb_1,\ c_2 = kc_1\ (k \neq 0),$$

jednačine sistema S su, prema teoremi 12.2 (koja važi i za slučaj više nepoznatih), ekvivalentne. Zato se jedna, na primjer, druga, može odbaciti, pa se sistem svodi na jednu jednačinu sa dvije nepoznate. Grafik te jednačine je prava

$$p:\ a_1x + b_1y = c_1$$

(sl. 12.1) i koordinate (x, y) svake tačke te prave su rješenja sistema S.



Sl. 12.1.

3^0 Ako je $D = 0$ i $D_x \neq 0$, tada je jednačina (3') protivrječna, pa je i sistem S protivrječan, on, dakle, nema rješenja. Iz uslova da je $D = 0$ i $D_x \neq 0$ slijedi da je

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1},$$

tj. odgovarajući koeficijenti uz nepoznate su proporcionalni, ali u toj proporciji nisu slobodni koeficijenti. Pošto je sada

$$a_2 = ka_1,\ b_2 = kb_1,\ c_2 \neq kc_1,$$

druga jednačina sistema S ima oblik $ka_1x + kb_1y = c_2$, odnosno

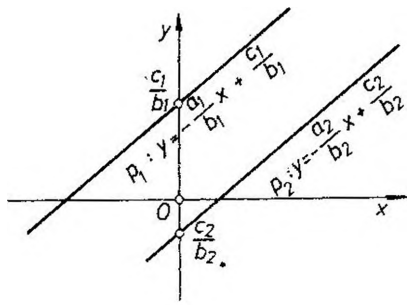
$$a_1x + b_1y = \frac{c_2}{k} \neq c_1,$$

pa ona, očigledno, protivrječi prvoj jednačini toga sistema.

S druge strane, iz uslova $D = 0$ i $D_x \neq 0$ slijedi da je

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},\ \frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}.$$

Zato, ako jednačine svedemo na eksplicitni oblik, dobijemo jednačine dvije prave p_1 i p_2 koje imaju jednake koeficijente pravca, a različite odreske na osi y. Te su prave, dakle, paralelne i različite (sl. 12.2), one nemaju zajedničkih tačaka i jasno je da sistem ne može imati rješenja.



Sl. 12.2.

Primjer 12.5. Riješiti pomoću determinanti sistem jednačina

$$2x - 10y + 3 = 0,$$
$$3x + 2y - 7 = 0.$$

Rješenje. Napišemo li dati sistem u obliku

$$2x - 10y = -3,$$
$$3x + 2y = 7,$$

imamo:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-10) = 34,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & -10 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 - 7 \cdot (-10) = 64,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot (-3) = 23.$$

Pošto je determinanta sistema $D \neq 0$, sistem je ekvivalentan sistemu

$$D \cdot x = D_x \wedge D \cdot y = D_y$$

(vidi slučaj 1), pa je:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{64}{34} = \frac{32}{17}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{23}{34}.$$

Važna napomena 12.2. Ako je determinanta sistema S $D = 0$, tada sistemi S i S_5 ne moraju biti ekvivalentni, i na to treba paziti. Ako je za neke vrijednosti parametara determinanta $D = 0$, tada radimo ovako: odredimo determinante D_x i D_y, pa ako je $D_x \neq 0$ ili $D_y \neq 0$, tada zaključujemo da sistem nema rješenja. Ako je, pak, $D_x = D_y = 0$, tada ćemo te vrijednosti parametara uvrstiti u dati sistem S i rješavati ga (na primjer, metodom zamjene ili Gausovom metodom). Pokažimo to na sljedećem primjeru.

Primjer 12.6. Kod sistema jednačina

$$S: \quad \begin{aligned} ax - 2ay &= 2, \\ ax + ay &= 0 \end{aligned}$$

je

$$D = 3a^2, \; D_x = 2a, \; D_y = -2a.$$

Za vrijednost parametra $a = 0$ je $D = D_x = D_y = 0$, pa ako, umjesto sistema S rješavamo sistem

$$S_5: \quad D \cdot x = D_x \wedge D \cdot y = D_y,$$

vidimo da su obje nepoznate x i y proizvoljne. Stavimo li, pak, u sistem S da je $a = 0$, tada sistem S izgleda ovako:

$$\begin{aligned} 0 &= 2, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

što znači da je prva jednačina protivrječna, pa sistem nema rješenja. Znači, sistemi S i S_5 nisu ekvivalentni.

Zadaci (12.18—12.32)

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

12.18. $\begin{aligned} 5x - 2y &= 7, \\ 10x + 7y &= 3. \end{aligned}$

12.19. $\begin{aligned} 2x - 3y &= 0, \\ x + 4y &= 0. \end{aligned}$

12.20. $\dfrac{a}{x+b} - \dfrac{b}{y-a} = 1,$

$\dfrac{b}{x+b} - \dfrac{a}{y-a} = 1.$

12.21. $|x| + 2y = 5,$

$2x + |y-1| = 3.$

12.22. a) $|x+1| + |y-1| = 5,$ b) $|x-1| + |y-5| = 1,$

$|x+1| = 4y - 4;$ $y = 5 + |x-1|.$

12.23. U jednačini $y = ax^2 + c$ odrediti parametre a i c tako da se dobije jednačina parabole koja prolazi tačkama $A(-1, -3)$ i $B(3, 0)$.

12.24. Ispitati postojanje i broj rješenja sistema jednačina:

a) $7x + 9y = 5,$ b) $2x - 6y = 10.$

$14x + 18y = 7;$ $x - 3y = 5.$

12.25. Treba odrediti sve vrijednosti parametra k za koje je sistem jednačina $kx + 3y = 7$, $3x + ky = 4$ protivrječan.

12.26. Odrediti parametar k tako da se prave kojima odgovaraju jednačine $3x + ky = 5 + k$ i $2x + 5y = 8$ sijeku.

12.27. Za koje vrijednosti parametra m je sistem jednačina

$$(m-1)x + 2my + 2 = 0,$$
$$2mx + (m-1)y - (m-1) = 0$$

a) neodređen; b) protivrječan; c) određen?

12.28. Koji od intervala $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(0, 1)$ sadrži neko m za koje sistem linearnih jednačina

$$mx + 3y = 5a \wedge \frac{x}{2} + y = \frac{5}{2}$$

može biti neodređen?

12.29. Naći sve vrijednosti parametra a za koje sistem jednačina

$$x + y = a \wedge 2x + ay = 4$$

ima, kao rješenje, par negativnih brojeva.

12.30. Naći sve vrijednosti parametra a za koje brojevi x i y zadovoljavaju sistem

$$x + y = a \wedge 2x - y = 3,$$

tako da je $x > y$.

12.31. Da li postoje takve vrijednosti parametra m za koje sistemi jednačina

a) $2mx - y = 0,$ b) $2x + y = 0,$

$x + my = 0;$ $3x - 2my = 0,$

imaju netrivijalnih rješenja?

12.32. Formule

$$x' = -x\sqrt{3} + y + 1 \text{ i } y' = x + y\sqrt{3}$$

određuju preslikavanje koordinatne ravni xOy na tu ravan, koje svakoj tački $T(x, y)$ pridružuje tačku $T'(x', y')$. Treba odrediti koordinate nepokretne tačke toga preslikavanja, i pokazati da postoji samo jedna takva tačka.

12.3. SISTEM OD TRI I VIŠE LINEARNIH JEDNAČINA

Gausova metoda

Primjer 12.7. Riješiti sistem jednačina

$$S: \begin{array}{ll} (1) & x - 2y + z = 1, \\ (2) & 2x + y - z = -3, \\ (3) & 3x + 2y - 2z = 2. \end{array}$$

Rješenje. Pomoću Gausove metode formirajmo sljedeće jednačine:

$$\begin{array}{lll} (4) & (1) + (2): & 3x - y = -2. \\ (5) & (1)\cdot 2 + (3): & 5x - 2y = 4. \\ (6) & (4)\cdot(-2) + (5): & -x = 8. \end{array}$$

Sada ćemo sistem S zamijeniti ekvivalentnim sistemom

$$S_1: \begin{array}{ll} (1) & x - 2y + z = 1, \\ (4) & 3x - y = -2, \\ (6) & -x = 8. \end{array}$$

Ovaj sistem ima jednu jednačinu sa jednom, jednu sa dvije i jednu sa tri nepoznate i zovemo ga *trougaoni* sistem.

Napomenimo da smo u sistemu S_1 umjesto jednačine (1) mogli uzeti jednačinu (2) ili (3) (jer su množioci 2 i -2 različiti od 0 – vidi teoremu 12.3), a umjesto jednačine (4) mogli smo uzeti jednačinu (5).

Iz jednačine (6) je

$$x = -8,$$

iz jednačine (4) tada slijedi da je

$$y = -22,$$

a iz jednačine (1) je

$$z = -35.$$

Rješenje sistema je trojka brojeva

$$x = -8,\ y = -22,\ z = -35.$$

Metoda determinanti

Opšti oblik sitema od tri linearne jednačine sa tri nepoznate je

$$S_1: \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{array}$$

Radeći slično kao kod sistema od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate, dobijemo sljedeće determinante trećeg reda:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Označimo li

$$D(a_1) = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D(b_1) = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D(c_1) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

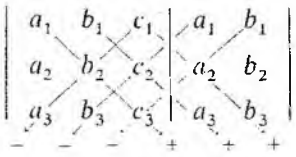
tada je determinanta sistema:

$$D = a_1 \cdot D(a_1) - b_1 \cdot D(b_1) + c_1 \cdot D(c_1).$$

Determinante $D(a_1)$, $D(b_1)$ i $D(c_1)$ zovemo *subdeterminante* ili *minori* determinante D[1]. Ako za $D(a_1)$, $D(b_1)$ i $D(c_1)$ u gornji izraz za D uvrstimo njihove vrijednosti, dobijemo formulu

(a) $$D = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3.$$

Ako u determinantu D sistema dopišemo prvi i drugi stupac te determinante, pa ako izvršimo množenje elemenata i sabiranja i oduzimanja proizvoda onako kako je pokazano na šemi, dobijemo upravo jednakost (a). Ovo je takozvano Sarusovo (Sarrus)[2] pravilo razvijanja determinante trećeg reda.



Za izraz (a) kažemo da je to razvoj determinante D po elementima prvog retka. Ona se, međutim, može razviti po elementima bilo kog retka ili stupca, i u tu svrhu uvodimo pojam *kofaktora*. Ako su i i j redni brojevi retka i stupca elementa E, tada je kofaktor $A(E)$ elementa E jednak

$$A(E) = (-1)^{i+j} \cdot D(E).$$

Tako je, na primjer,

$$A(a_1) = (-1)^{1+1} \cdot D(a_1) = D(a_1), \quad A(b_3) = (-1)^{3+2} \cdot D(b_3) = -D(b_3).$$

Razvoj determinante D po elementima drugog retka izgleda ovako:

$D = a_2 \cdot A(a_2) + b_2 \cdot A(b_2) + c_2 \cdot A(c_2)$, odnosno:

$D = -a_2 \cdot D(a_2) + b_2 \cdot D(b_2) - c_2 \cdot D(c_2)$.

Napomena 12.3. Pošto determinantu možemo razviti po elementima bilo kog stupca ili retka, uviđamo da vrijedi sljedeće: ako su svi elementi nekog stupca ili retka jednaki 0, tada je vrijednost determinante jednaka 0.

---

[1] Subdeterminanta nekog elementa se dobije izostavljanjem retka i stupca u kome stoji taj element.

[2] P. Sarrus (1798—1861) — francuski matematičar.

Sve što je rečeno o razvoju determinante D sistema, vrijedi i za determinante D_x, D_y i D_z.

Što se tiče rješenja sistema S vrijedi sljedeće:

1° Ako je $D \neq 0$, sistem S je ekvivalentan sistemu

$$S_1: \quad D \cdot x = D_x \wedge D \cdot x = D_y \wedge D \cdot z = D_z,$$

pa sistem ima jedno i samo jedno rješenje — to je trojka brojeva:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}.$$

2° Ako je $D = 0$, $D_x = D_y = D_z = 0$, sistemi S i S_1 ne moraju biti ekvivalentni (ali je sistem S_1 posljedica sistema S). U tome slučaju rješavamo sistem S, na primjer metodom supstitucije, ili Gausovom metodom. Ako u datom sistemu ima promjenljivih koeficijenata (parametara), pa ako je za neke vrijednosti parametara $D = 0$, postupamo kao i u slučaju sistema od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate.

3° Ako je $D = 0$, $D_x \neq 0$ ili $D_y \neq 0$ ili $D_z \neq 0$, dati sistem je protivrječan (nema rješenja).

Napomenimo da za determinante proizvoljnog reda vrijede sljedeće teoreme:

Teorema 12.5. Ako su dva retka ili dva stupca isti, tada je vrijednost determinante jednaka 0.

Teorema 12.6. Vrijednost determinante se ne mijenja ako elementima jednog retka (stupca) dodamo odgovarajuće elemente nekog drugog retka (stupca) pomnožene istim brojem. (Teorema 12.5. je posljedica ove teoreme.)

Primjer 12.8. Riješimo pomoću determinanti sistem

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1, \\ 2x + y - z &= -3, \\ 3x + 2y - 2z &= 2, \end{aligned}$$

koji smo riješili u primjeru 12.7.

Rješenje.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot A(-1) + 0 \cdot A(0) + 0 \cdot A(0) =$$

$$= -1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot D(-1) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 - 3) = -1.$$

Ovdje smo elementima trećeg stupca dodali elemente drugog stupca (prema teoremi 12.6), jer smo tako dobili determinantu čiji je razvoj po trećem stupcu jednostavan. Za ostale determinante imamo:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 22,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 35.$$

Rješenje sistema je:

$$x = \frac{D_x}{D} = -8, \quad y = \frac{D_y}{D} = -22, \quad z = \frac{D_z}{D} = -35.$$

Zadaci (12.33—12.53)

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

12.33. $6x + 2y = 4,$
$x + 3y - z = 0,$
$2x - 4y + z = 1.$

12.34. $x - 3y + 2z = 2,$
$-2x + y - z = 3,$
$3x - 2y + 3z = 2.$

12.35. $x + 2y + z - 2 = 0,$
$3x - 4y + 2z + 2 = 0,$
$2x + 2y - z + 6 = 0.$

12.36. Ispitati postojanje rješenja sistema jednačina

$$x + 2y + 3z = 8,$$
$$2x + 4y + 6z = 16,$$
$$3x + 6y + 9z = 24.$$

12.37. Riješiti sisteme jednačina:

a) $3x + y = -1,$
$x + y = 1,$
$2x + 3y = 4;$

b) $3x + y = -1,$
$x + y = 1,$
$2x + 3y = 2.$

12.38. Odrediti odnos između koeficijenata a, b i c tako da sistem jednačina

$$3x + y = -1 \wedge x + y = 1 \wedge ax + by = c$$

ima rješenja.

12.39. Treba odrediti parametar a tako da sistem jednačina

$$x + y + z = 0,$$
$$2x - 3y + 4z = 0,$$
$$x - y + az = 0$$

ima rješenja različitih od trivijalnog i odrediti ih.

12.40. Riješiti Gausovom metodom sistem jednačina

$$\begin{aligned} x + ay + bz &= 1, \\ ax + y + bz &= 1, \\ x + y + abz &= b. \end{aligned}$$

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

12.41. $\begin{aligned} ax + 2y + z &= 1, \\ x + 2ay + z &= 2, \\ x + 2y + az &= 1. \end{aligned}$

12.42. $\begin{aligned} x + y + z &= 4, \\ ax + 4y + z &= 1, \\ 6x + (a+2)y + 2z &= 11. \end{aligned}$

12.43. $ax + y + z = 2a \wedge x + ay + z = a + 1 \wedge x + y + az = a + 1.$

12.44. Posmatrajmo kvadratni trinom $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ako je $f(1) = 0, f(7) = 1$ i $f(3) = 4$, tada je $f(x) = (x-1)^2$, za svaku vrijednost $x \in R$. Dokazati.

12.45. Jednačine

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ (a-2)x + 4y + z &= 5, \\ 6x + ay + 2z &= 13, \end{aligned}$$

za razne vrijednosti parametra a predstavljaju u koordinatnom sistemu $Oxyz$ u prostoru ravni.

a) Izraziti pomoću a koordinate presječne tačke $M(x, y, z)$ tih ravni.

b) Odrediti parametar a tako da tačka M pripada sferi radijusa 10 i središta u ishodištu koordinatnog sistema, pa zatim odrediti i tačku M. Uputa: jednačina sfere je $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

12.46. Riješiti sistem

$$\begin{aligned} kx + y + kz + 5k &= 0, \\ x + 2y + 2kz + 2(3k+1) &= 0, \\ kx - y + z + k^2 &= 0, \end{aligned}$$

i uporediti po veličini komponente x, y i z trojke (x, y, z) za sve vrijednosti parametra k za koje sistem ima jedno i samo jedno rješenje.

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

12.47. $\begin{aligned} x + y - 2z + u &= -4, \\ 2x - y - u &= 3, \\ x - y + z - 3u &= 4, \\ 3x + y - z + u &= 0. \end{aligned}$

12.48. $\begin{aligned} 2x - y + z + 3u &= -2, \\ 2x + y - z + 2u &= -5, \\ x - z - u &= 4, \\ x + y + z - 2u &= 7. \end{aligned}$

12.49. $\begin{aligned} x + y - 3z + t &= 1, \\ 2x - 4y + 2t &= 2, \\ 3x - 4y - 2z &= 0, \\ x + 2z + 3t &= 3. \end{aligned}$

12.50. Ispitati postojanje rješenja sistema

$$\begin{aligned} x + y + 2z - t &= 3, \\ 2x - y + z + t &= 1, \\ x - 5y - 4z + 5t &= -7, \\ 4x - 5y - z + 5t &= 3. \end{aligned}$$

12.51. Pokazati da sistem

$$x + y + z = 1 \wedge 2x + 3y - 5z = 2 \wedge 5x - 4y + 5z = 5 \wedge 3x - 2y - 6z = 3$$

ima rješenja, i odrediti ih.

12.52. Odrediti, ukoliko postoje, netrivijalna rješenja sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z - t &= 0, \\ x - y - 2z - 4t &= 0, \\ 3x + y + 3z - 2t &= 0, \\ 6x + 3y - 7t &= 0. \end{aligned}$$

12.53. Riješiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n &= 1, \\ x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n &= 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_n &= 3, \\ &\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} &= n. \end{aligned}$$

13. LINEARNE NEJEDNAČINE I SISTEMI LINEARNIH NEJEDNAČINA

Zadaci (13.1—13.16)

Riješiti sljedeće nejednačine:

13.1. a) $ax < b$; b) $ax > b$.

13.2. a) $(m^2 - n^2)x < m - n$; b) $\frac{m^3 x}{2} - 1 > m^2 + m + \frac{x}{2}$.

13.3. a) $\frac{-3}{2x + 4} < 0$; b) $\frac{2x}{3x - 4} + 7 \geqslant \frac{3 - 5x}{8 - 6x} - 4$.

13.4. a) $|x| > x$; b) $|x - 1| \geqslant x - 1$.

13.5. $|x - 2| - |3 + x| < 0$.

13.6. a) $\left|\frac{2x - 1}{x - 1}\right| < 1$; b) $\left|\frac{2x - 1}{x + 1}\right| > 2$.

13.7. a) $\left|\frac{x}{x + 4}\right| < 1$; b) $\left|\frac{5x + 2}{2x - 3}\right| \geqslant 3$.

13.8. a) $\Big||x + 2| - 1\Big| \leqslant 1$; b) $\Big||x - 1| - 2x\Big| > |x|$.

Riješiti računom i grafički sljedeće nejednačine:

13.9. $x - 2y + 2 > 0$.

13.10. a) $|x - y + 2| > 1$; b) $|2x - 3y + 1| < 4$.

13.11. a) $|x| + |y| < 1$; b) $|x - 1| + |y - 1| \leqslant 1$.

Riješiti i prikazati grafički rješenja sljedećih sistema nejednačina:

13.12. a) $\begin{aligned} x - 2y - 4 &< 0, \\ 2x + 2y - 5 &< 0; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x - y + 3 &> 0, \\ x + y - 3 &< 0, \\ y &> 1. \end{aligned}$

Riješiti sisteme nejednačina

13.13. a) $|x| \geq 1$,
$|x-1| < 3$;

b) $|(5t+2):(2t-3)| \geq 3$,
$|2-t| < a, \quad (a \in R)$.

Riješiti sljedeće sisteme nejednačina i prikazati rješenje grafički:

13.14. $|3x+2y| \leq 2 \wedge |y| \leq 1 \wedge 2x - y \geq 0$.

13.15. $|x-y| \leq 1 \wedge |x+y| \leq 1 \wedge x + |y| \leq 1$.

13.16. $|3x+2y+1| \leq 1$,
$x + y \geq -1$,
$|y| \leq 2$.

14. KVADRATNA FUNKCIJA. KVADRATNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

14.1. NULE I ZNAK KVADRATNE FUNKCIJE. KVADRATNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Formula

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

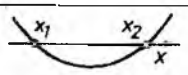
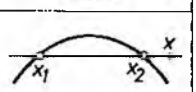
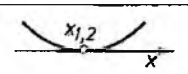
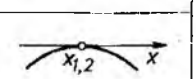
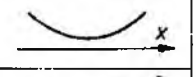
gdje su a, b i c, $a \neq 0$ realni parametri, a x realna varijabla, određuje opšti oblik kvadratne funkcije $f: R \to R$. Nule te funkcije su isto što i rješenja pripadne kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

U sljedećoj tabeli prikazana je zavisnost nula od znaka diskriminante

$$D = b^2 - 4ac,$$

kao i zavisnost grafika (parabole) i znaka funkcije od znaka diskriminante i koeficijenta a.

Znak D	Znak a	Grafik	Nule funkcije - rješenja jednačine $f(x) = 0$	Znak funkcije — rješenja nejednačina $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$
$D > 0$	$a > 0$		$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$f(x) > 0,\ x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ $f(x) < 0,\ x \in (x_1, x_2)$
	$a < 0$			$f(x) > 0,\ x \in (x_1, x_2)$ $f(x) < 0,\ x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$
$D = 0$	$a > 0$		$x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$	$f(x) > 0,\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
	$a < 0$			$f(x) < 0,\ x \in R \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
$D < 0$	$a > 0$		$x_{1,2} \notin R$	$f(x) > 0,\ x \in R$
	$a < 0$		$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a}$	$f(x) < 0,\ x \in R$

Primjer 14.1. Formulom

$$f(x) = (m^2 - m - 2)x^2 + 2mx + 1$$

određen je jedan skup kvadratnih funkcija. Odrediti između njih one čije su vrijednosti pozitivne na čitavom skupu R.

Rješenje. Zadatak se sastoji u tome da se odredi parametar m tako da je skup rješenja $\mathscr{R}$ nejednačine $f(x) > 0$ jednak skupu R. Da bi to bilo, potrebno je i dovoljno da su ispunjeni uslovi

$$a > 0 \text{ i } D < 0,$$

tj.

$$m^2 - m - 2 > 0 \text{ i } 4m + 8 < 0.$$

Skup rješenja prve nejednačine je

$$\mathscr{R}_1 = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty),$$

a skup rješenja druge nejednačine je

$$\mathscr{R}_2 = (-\infty, -2).$$

Zato je skup rješenja sistema nejednačina

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cap \mathscr{R}_2 = (-\infty, -2).$$

Prema tome, za svaku vrijednost parametra $m \in (-\infty, -2)$ dobijemo po jednu kvadratnu funkciju f takvu da je $f(x) > 0$ za sve vrijednost $x \in R$.

Zadaci (14.1—14.27)

14.1. Ako su a, b i c dužine stranica trougla, tada jednačina

$$b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$$

nema realna rješenja. Dokazati.

14.2. Data je jednačina

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1.$$

a) Dokazati da ona za sve vrijednosti $a, b \in R$, osim za $a = \pm 1$ i $b = 0$, odnosno $a = b = 0$, ima realna rješenja; b) mogu li rješenja biti jednaka?

14.3. Naći potrebne i dovoljne uslove uz koje je kvadratni trinom $ax^2 + bx + c$ kvadrat binoma prvog stepena.

14.4. Naći uslov koji mora zadovoljavati parametar m da bi jednačina

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m$$

imala rješenja u intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

14.5. Neka su u jednačini $x^2 + px + q = 0$ p i q cijeli brojevi. Ako su rješenja x_1 i x_2 jednačine racionalni brojevi, tada su ta rješenja cijeli brojevi. Dokazati.

Riješiti sljedeće jednačine:

14.6. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5.$

14.7. $\left|x - \frac{x^2}{x-1}\right| = x - \frac{x^2}{x-1}.$

14.8. $|(x-1)(x+2)| - |(x+1)(2x-5)| = 2.$

14.9. Riješiti: a) grafički, b) računom jednačinu

$$x^2 = |2x + 3|.$$

14.10. Svaki od kvadratnih trinoma

$$2x^2 + (m + n + 2\sqrt{mn})x + (m + n)\sqrt{mn},$$

gdje su m i n pozitivni brojevi, ima nule x_1 i x_2 takve da je

a) $x_1 = x_2$ za $m = n$ i b) $x_1 < x_2$ za $m \neq n$. Dokazati. Potvrditi zaključke na slici polukružnice prečnika $r = m + n$.

14.11. Odrediti sve realne vrijednosti parametra a za koje polinomi

$$f(x) = x^2 + ax + 1 \quad \text{i} \quad g(x) = x^2 + x + a$$

imaju u kompleksnom području bar jednu zajedničku nulu i odrediti tu nulu, uz grafičku ilustraciju.

14.12. Date su realne funkcije

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad \text{i} \quad g(x) = x^2 + 2mx - 1,$$

i neka su x_1 i x_2 $(x_1 < x_2)$ nule funkcije f, a x_3 i x_4 $(x_3 < x_4)$ nule funkcije g. Treba ispitati poredak sve 4 nule u zavisnosti od parametra m.

14.13. Odrediti znak funkcija datih formulama:

a) $f(x) = -x^2$; b) $f(x) = ax^2 + x, \quad a \neq 0$;
c) $f(x) = x^2 + 6x + 10$; d) $f(x) = -2x^2 - 3x + 9$.

14.14. Treba odrediti m tako da nejednačina $3x^2 - 2mx + 12 > 0$ bude zadovoljena za svaku realnu vrijednost x.

14.15. Koji uslov mora zadovoljavati parametar b da bi trinom $x^2 - 4x + b$ imao vrijednosti veće od 15 za sve vrijednosti x?

Riješiti nejednačine:

14.16. $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3.$

14.17. $\left|\frac{4-x}{x}\right| + \left|\frac{2x-5}{x}\right| < 2x.$

14.18. $|x^2 - |x| + 3| < 5.$

14.19. Riješiti jednačinu $|x - 1| + |x^2 + 3x - 4| = 5.$

14.20. Za koje vrijednosti parametra a jednačina

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$$

ima više od dva rješenja, i koja su to rješenja?

14.21. Naći rješenja nejednačine

$$\left|\frac{1 + i\sqrt{7}}{4} + \sin x\right| < 1,$$

gdje je i imaginarna jedinica.

14.22. Data je realna funkcija formulom

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + m^2}{x^2 + 2x + m^2}, \quad m > 1,$$

treba dokazati da je za svaku vrijednost $x \in R$ tačna formula

$$\frac{m-1}{m+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{m+1}{m-1}.$$

14.23. Naći definiciono područje $D(f)$ funkcije date formulom

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 + x - 30}}.$$

14.24. Neka je preslikavanje $f : R \mapsto R$ zadano formulom

$$f(x) = x^2 + (a+1)x + 1.$$

a) Odrediti sve realne vrijednosti parametra a za koje je iskaz

$(x \in R) \Rightarrow \left(\left|\frac{f(x)}{x^2 + x + 1}\right| < 3\right)$ tautologija.

b) Odrediti $A \cap B$, gdje je $A = \left\{a \in R \mid a(a-2)^{\frac{1}{2}} \in R\right\}$, a B je skup vrijednosti parametra a određenih u zadatku a).

c) Naći kakve krive linije predstavlja grafik funkcije određene formulom $y = |f(x)|$ u zavisnosti od vrijednosti parametra a, i uočiti da sve te linije prolaze istom tačkom.

d) Navesti one vrijednosti parametra a za koje kriva $y = |f(x)|$ predstavlja grafik kvadratne funkcije, i odrediti geometrijsko mjesto tjemena tih grafika.

14.25. Treba odrediti sve vrijednosti parametra k za koje funkcija određena formulom

$$f(x) = kx^2 + 4x + 3k + 1$$

ima pozitivne vrijednosti za sve vrijednosti $x > 0$.

14.26. Riješiti grafički i analitički nejednačinu

$$|x + 2| - |x^2 - 4| > 0.$$

14.27.* Treba odrediti parametar k tako da nejednačina

$$x^2 - 2kx + 2|x - k| + 2 < 0$$

ima bar jedno rješenje.

14.2. EKSTREM I TOK KVADRATNE FUNKCIJE

Formula kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ može se napisati u obliku

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right], \quad D = b^2 - 4ac.$$

Izraz u srednjoj zagradi ima najmanju vrijednost ako je $x = -\frac{b}{2a}$ i tada funkcija ima ekstremnu vrijednost

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Ako je koeficijent $a > 0$, ta je vrijednost minimalna, a ako je $a < 0$, ona je maksimalna.

Tačka $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ je tjeme parabole koja predstavlja kvadratnu funkciju. Napomenimo da se grafik parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$ može dobiti translacijom parabole $f(x) = ax^2$ za radijus-vektor tačke T.

Primjer 14.2. Odrediti skup svih vrijednosti $\mathrm{Im}(f)$ i opisati tok (promjenu) funkcije f koja je određena formulom

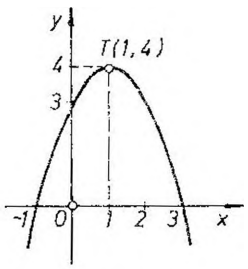
$$f(x) = -x^2 + 2x + 3,$$

uz grafičku ilustraciju.

Rješenje. Pošto je $a = -1$, tj. $a < 0$, funkcija f ima maksimum, i njegova je vrijednost

$$f(x)_{\max} = \frac{4ac - b^2}{4a} = 4.$$

Taj maksimum funkcija dostiže za vrijednost argumenta $x = -\frac{b}{2a} = 1$ (sl. 14.1).



Sl. 14.1.

Skup vrijednosti funkcije je

$$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 4).$$

Funkcija raste od $-\infty$ do 4 kada x raste od $-\infty$ do 1, a opada od 4 do $-\infty$ kada x raste od 1 do $+\infty$.

Zadaci (14.28—14.37)

14.28. Odrediti koordinate krajnje tačke T vektora $\vec{OT}$ translacije koja parabolu $y = x^2$ preslikava u parabolu

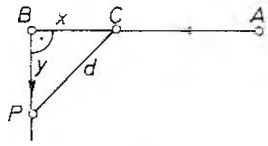
a) $y = x^2 + 3x + 1$; b) $y = (x + 4)^2 + 1$.

14.29. Odrediti ekstrem i opisati tok funkcije:

a) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$; b) $f(x) = -4x^2 + 3$; c) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$.

14.30. Treba sa 400 m žice ograditi dio dvorišta tako da se dobije ograđeni pravougaoni prostor najveće moguće površine, pri čemu ograda ima četiri struke, a zid zgrade služi kao jedna strana ograde. Odrediti stranice ograđenog prostora.

14.31. Iz tačaka A i B, prema slici 14.2, polaze istovremeno dva voza u naznačenim smjerovima, brzinama od 40 km/h, odnosno 30 km/h. Nakon koliko će vremena rastojanje između vozova biti najmanje, ako je $\overline{AB} = 80$ km, i koliko je to rastojanje?



Sl. 14.2.

14.32. Ako parametar m prolazi skupom R realnih brojeva, tada tjemena skupa parabola

$$y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$$

određuje jednu pravu. Odrediti tu pravu.

14.33. Naći minimalnu vrijednost funkcije $y = 3x^2 + 5x - 2$

a) na segmentu $[0,2]$, b) na intervalu $(-10,5)$.

14.34. Grafici jednačine $y = x^2 + (m - 2)x + 3 - m$, za razne vrijednosti parametra m čine familiju parabola.

a) Dokazati da sve te parabole prolaze jednom nepokretnom tačkom $A(x_0, y_0)$ i odrediti tu tačku.

b) Odrediti jednačinu skupa tačaka koje su tjemena svih tih parabola, uz grafičku ilustraciju.

14.35. Formulom $f(x) = |x^2 - kx + 1|$ određena je, za svaku posebnu vrijednost parametra $k \in R$, funkcija $f: R \mapsto R$.

a) Za koje su vrijednosti parametra k grafici tih funkcija parabole?

b) Dokazati da sve te parabole prolaze istom tačkom i odrediti tu tačku.

c) Odrediti jednačinu skupa tjemena tih parabola, uz grafičku ilustraciju.

14.36. Na skupu R realnih brojeva data je funkcija f formulom

$$f(x) = |x^2 - 1| + |x^2 - 4| + |x + 2| + |x + 1|.$$

Za koju vrijednost x funkcija ima najmanju vrijednost i kolika je ta vrijednost?

14.37. Data je familija funkcija

$$f(x) = (k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72.$$

a) Pokazati da nijedna funkcija iz date familije funkcija ne može imati negativan maksimum.

b) Za koje cjelobrojne vrijednosti parametra k imamo funkcije čije su obje nule iz skupa Z^- negativnih cijelih brojeva?

14.3. VIETOVE FORMULE[1)]

Za rješenja $x_{1,2}$ kvadratne jednačine date u opštem obliku

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vrijede Vietove formule:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \tag{14.1}$$

[1)] F. Viète (1540–1603) — francuski matematičar.

Ako je koeficijent $a = 1$, imao normirani (kanonski) oblik kvadratne jednačine

$$x^2 + px + q = 0,$$

i tada Vietove formule izgledaju ovako:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q. \tag{14.2}$$

Napomenimo da opšti oblik svodimo na kanonski dijeleći jednačinu datu u opštem obliku sa a, pa je onda

$$p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}. \tag{14.3}$$

Primjer 14.3. U jednačini

$$(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$$

treba odrediti parametar m tako da rješenja jednačine budu:

a) pozitivna; b) negativna; c) različitog znaka.

Rješenje. Da bi se uopšte moglo govoriti o znaku rješenja x_1 i x_2, ona moraju biti realna (jer imaginarne brojeve ne možemo upoređivati relacijom $<$ sa brojem 0, pošto u skupu C kompleksnih brojeva ne uvodimo uređajnu relaciju $<$). Zato mora biti diskriminanta $D \geqslant 0$.

a) Prema formulama (14.2) vrijedi ekvivalencija:

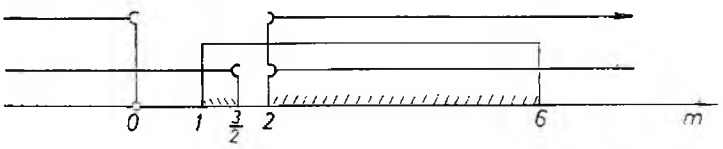
$$(x_1 > 0 \wedge x_2 > 0) \Leftrightarrow (D \geqslant 0 \wedge p < 0 \wedge q > 0),$$

tj. (imajući u vidu i formule 14.3), potrebni i dovoljni uslovi da bi rješenja bila pozitivna su

$$m^2 - 7m + 6 \leqslant 0 \wedge \frac{2m}{m-2} > 0 \wedge \frac{2m-3}{m-2} > 0.$$

Odavde se dobiju uslovi

$$(1 \leqslant m \leqslant 6) \wedge (m < 0 \vee m > 2) \wedge (m < \frac{3}{2} \vee m > 2),$$



odakle slijedi da

$$m \in (2, 6].$$

Znači, za sve vrijednosti parametra m iz intervala $(2, 6]$ oba rješenja jednačine su pozitivna.

b) Da bi bilo $x_1 < 0$ i $x_2 < 0$, potrebno je i dovoljno da je

$$D \geqslant 0 \wedge p > 0 \wedge q > 0,$$

što je ispunjeno ako i samo ako

$$m \in \left[1, \frac{3}{2}\right).$$

Rješenja imaju različit znak ako i samo ako je

$$D > 0 \text{ i } q < 0.$$

Pošto je, međutim, $q = \frac{c}{a}$, mora biti $\frac{c}{a} < 0$, tj. $ac < 0$, pa slijedi da je $D = b^2 - 4ac > 0$.

Znači, uslov $q < 0$ povlači uslov $D > 0$, pa ga ne treba ni navoditi. Imamo, dakle, ekvivalenciju

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow q < 0,$$

odnosno

$$x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

Zadaci (14.38—14.45)

14.38. Ako su x_1 i x_2 realne nule polinoma $f(x) = x^2 + px + q$, treba odrediti vrijednosti parametara p i q tako da $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$ budu realne nule polinoma $g(x) = x^2 - p^2x + pq$.

14.39. Treba odrediti kvadratnu jednačinu sa racionalnim koeficijentima, ako je jedno njeno rješenje

$$x_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

14.40. Za koje vrijednosti parametra m se rješenja jednačine

$$(2m - 1)x^2 + (5m + 1)x + (3m + 1) = 0$$

odnose kao 3 : 2?

14.41. U trinomu

$$(k - 1)x^2 - 2(k + 1)x + 2k - 1$$

odrediti parametar k tako da:

a) trinom ima obje nule negativne;

b) zbir recipročnih vrijednosti nula bude veći od $\frac{1}{2}$.

14.42. Data je kvadratna jednačina

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

a) Izraziti proizvod $P = (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1)$ pomoću koeficijenata a, b i c.

b) Odatle izvesti uslov za te koeficijente tako da odnos između rješenja jednačine bude jednak parametru k.

c) Ako su a, b i c racionalni brojevi, dokazati da su, uz uslov pod b), rješenja jednačine racionalna, izuzev za $b = 0$.

14.43. Ako su x_1 i x_2 realna rješenja jednačine

$$mx^2 + (m - 1)(x + 1) = 0, \; m \neq 0,$$

prikazati izraz

$$A = x_2^2 \left(\frac{x_1^2}{x_2} - x_2\right) + x_1^2\left(\frac{x_2^2}{x_1} - x_1\right)$$

pomoću parametra m, i odrediti m tako da izraz A bude pozitivan.

14.44. Data je jednačina

$$2x^2 + 2x + \cos\alpha = 0$$

po nepoznatoj x.

a) Kakav znak imaju njena rješenja, ako je $\alpha \in (0, 2\pi)$?

b) Naći α pod uslovom da je $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ i pokazati da je tada $x_1^2 + x_2^2 < 1{,}9$.

14.45. Data je familija funkcija formulom

$$f(x) = (k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72.$$

a) Odrediti između njih one funkcije kod kojih su vrijednosti parametra k cijeli brojevi, a nule su im cijeli negativni brojevi.

b) Odrediti one funkcije čije su obje nule jednake parametru k.

14.4. POLOŽAJ NULE KVADRATNE FUNKCIJE PREMA DATOM RAZMAKU

Neka su α i β realni brojevi i $\alpha < \beta$. Da bismo mogli govoriti o položaju nula x_1, x_2 kvadratne funkcije date formulom

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

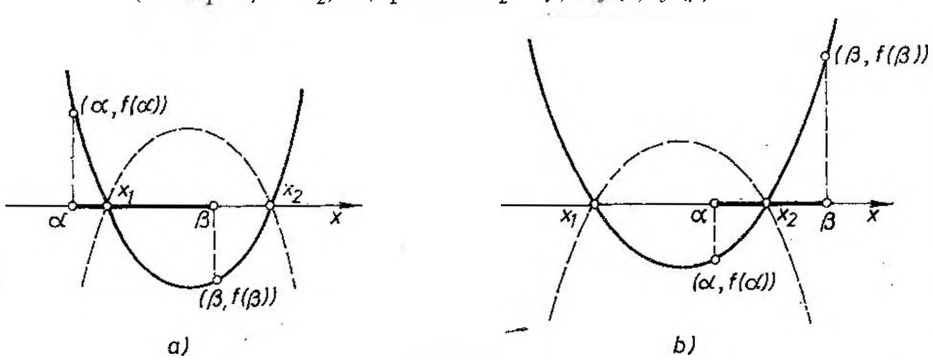
odnosno rješenja kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

prema razmaku (intervalu) (α, β), mora diskriminanta biti nenegativna, jer, u protivnom, ne možemo upoređivati imaginarne nule funkcije sa realnim brojevima α i β.

a) Da bi jedna i samo jedna nula bila u razmaku (α, β), potrebno je i dovoljno da je $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ (sl. 14.3). Imamo, dakle, ekvivalenciju:

$$(\alpha < x_1 < \beta < x_2) \vee (x_1 < \alpha < x_2 < \beta) \Leftrightarrow f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0.$$



Sl. 14.3.

Uslov $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ povlači uslov $D > 0$, pa ga ne treba posebno navoditi.

Želimo li, još preciznije, odrediti uslove uz koje je jedna nula u razmaku (α, β), a druga desno ili lijevo od tog razmaka, tada imamo:

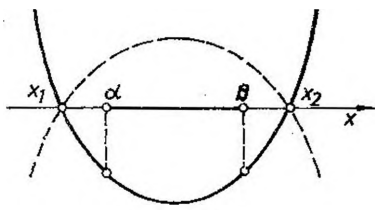
$$(\alpha < x_1 < \beta < x_2) \Leftrightarrow [a\cdot f(\alpha) > 0 \wedge a\cdot f(\beta) < 0] \quad \text{(sl. 14.3. a)),}$$

$$(x_1 < \alpha < x_2 < \beta) \Leftrightarrow [a\cdot f(\alpha) < 0 \wedge a\cdot f(\beta) > 0] \quad \text{(sl. 14.3. b)).}$$

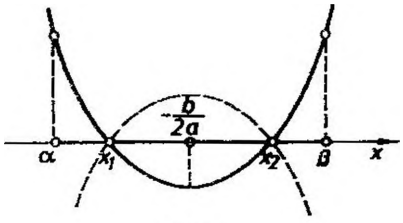
Uočimo da ni ovdje nije potrebno navoditi uslov $D > 0$, jer uslovi $a\cdot f(\alpha) < 0$, odnosno $a\cdot f(\beta) < 0$ obezbjeđuju postojanje realnih nula (pošto parabola siječe osu x).

b) Ako je jedna nula lijevo, a druga desno od razmaka (α, β), tada, prema slici 14.4, imamo:

$$(x_1 < \alpha < \beta < x_2) \Leftrightarrow [a\cdot f(\alpha) < 0 \wedge a\cdot f(\beta) < 0].$$



Sl. 14.4.



Sl. 14.5.

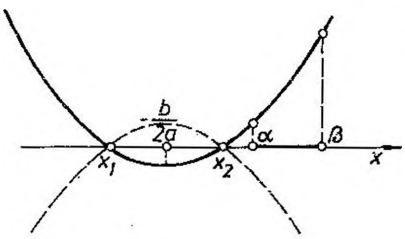
c) Ako su obje nule u razmaku (α, β), kao na slici 14.4, tada imamo:

$$(\alpha < x_1 \leqslant x_2 < \beta) \Leftrightarrow$$

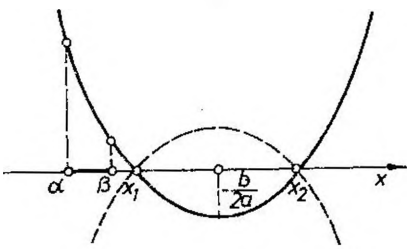
$$\Leftrightarrow \left[(D \geqslant 0 \wedge a\cdot f(\alpha) > 0 \wedge a\cdot f(\beta) > 0 \wedge \alpha < -\frac{b}{2a} < \beta \right].$$

d) Ako su obje nule lijevo od razmaka (α, β), kao na slici 14.6, tada imamo:

$$(x_1 \leqslant x_2 < \alpha) \Leftrightarrow \left[D \geqslant 0 \wedge a\cdot f(\alpha) > 0 \wedge -\frac{b}{2a} < \alpha \right].$$



Sl. 14.6.



Sl. 14.7.

e) Ako su, pak, obje nule desno od razmaka (α, β), kao na slici 14.7, tada imamo:

$$(\beta < x_1 \leqslant x_2) \Leftrightarrow \left[D \geqslant 0 \wedge a\cdot f(\beta) > 0 \wedge \beta < -\frac{b}{2a} \right].$$

Primjer 14.4. Treba odrediti vrijednost parametra k tako da se:

a) jedna i samo jedna nula,

b) obje nule funkcije date formulom

$$f(x) = kx^2 + 2(k-1)x + 2(k-1)$$

nalaze u razmaku $(-1,1)$.

Rješenje. a) Ovdje je $\alpha = -1$, $\beta = 1$, pa, prema onome što je rečeno uz sliku 14.2, imamo:

$$(x_1 < -1 < x_2 < 1) \vee (-1 < x_1 < 1 < x_2) \Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0.$$

Pošto je $f(-1) = k$, $f(1) = 5k - 4$, dobijemo nejednačinu

$$k \cdot (5k - 4) < 0,$$

čija rješenja čine interval $\left(0, \frac{4}{5}\right)$.

Prema tome, tačno jedna nula onih funkcija kod kojih vrijednost parametra k pripada intervalu $\left(0, \frac{4}{5}\right)$, leži u razmaku $(-1, 1)$.

b) Prema onome što je rečeno uz sliku 14.4, imamo:

$$(-1 < x_1 \leqslant x_2 < 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[D \geqslant 0 \wedge a \cdot f(-1) > 0 \wedge a \cdot f(1) > 0 \wedge -1 < -\frac{b}{2a} < 1 \right].$$

Odavde se dobije sistem nejednačina:

$$4(k-1)(-k-1) \geqslant 0 \wedge k^2 > 0 \wedge k(5k-4) > 0 \wedge -1 < -\frac{k-1}{k} < 1,$$

čija rješenja su data sa

$$\frac{4}{5} < k \leqslant 1.$$

Znači, za svaku vrijednost parametra $k \in \left(\frac{4}{5}, 1\right]$ dobijemo kvadratne funkcije čije se obje nule x_1 i x_2 nalaze u razmaku $(-1, 1)$.

Napomena 14.1. Zadatke o položaju nula kvadratne funkcije prema datom razmaku (α, β) moguće je, u principu, rješavati i direktno, stavljajući u lijeve strane ekvivalencija koje smo naveli uz slike 14.3. do 14.7. izraze za x_1 i x_2. Tako bismo kod primjera 14.4. b) imali uslove:

$$-1 < \frac{-2(k-1) - \sqrt{4(k-1)(-k-1)}}{2k} \leqslant \frac{-2(k-1) + \sqrt{4(k-1)(-k-1)}}{2k} < 1.$$

Odavde je, međutim, teže odrediti parametar k zbog iracionalnih izraza. To je pogodno samo kada je diskriminanta D kvadrat (ili parni stepen) nekog izraza.

Zadaci (14.46—14.54)

14.46. Za koje vrijednosti parametra k jedna i samo jedna nula funkcije

$$f(x) = (k+1)x^2 - (k^2 + k + 6)x + 6k$$

leži u intervalu $(0,1)$?

14.47. Posmatrajmo familiju funkcija kojima odgovara formula

$$f(x) = (m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m, \quad m \in R \setminus \{2\}.$$

a) Odrediti parametar m tako da se dobije podskup funkcija čija je jedna nula manja od 2, a druga veća od 3.

b) Postoji li u skupu funkcija iz a) funkcija čije su nule simetrične u odnosu na središte intervala (2, 3)?

14.48. Koliki mora da bude parametar k da bi oba rješenja jednačine

$$(k-1)x^2 - 2kx + k + 3 = 0$$

bila pozitivna?

14.49. Za koje vrijednosti parametra m je bar jedan korijen jednačine

$$(2m-3)x^2 - 2(m+1)x + m + 7 = 0$$

veći od 2?

14.50. Odrediti sve vrijednosti parametra k za koje jednačina

$$f(\sin x) = (k+1)\sin^2 x - 2(k-1)\sin x + 1 - k = 0$$

ima realnih rješenja.

14.51. Za koje vrijednosti parametra m jednačina

$$\cos 2x = 2m \cos x$$

ima rješenja?

14.52. Data je funkcija f formulom

$$f(x) = kx^2 + (1-k^2)x - k.$$

Treba odrediti sve realne vrijednosti parametra k tako da nejednačina $f(x) > 0$ ima rješenje i da nijedno rješenje te nejednačine nije po apsolutnoj vrijednosti veće od 2.

14.53. Formulom

$$f(x) = k^2x + kx - 2, \quad k \neq 0$$

određena je familija funkcija iz R u R. Treba odrediti parametar k tako da je jedna nula funkcija po apsolutnoj vrijednosti veća od 1, a druga po apsolutnoj vrijednosti manja od 1.

14.54. Formula

$$y = (k+1)x^2 - 2(k-1)x + k - 5$$

određuje familiju krivih.

a) Pokazati da sve te krive prolaze jednom tačkom i naći koordinate te tačke.

b) Za koje vrijednosti parametra k imamo parne funkcije?

c) Za koje vrijednosti k su presječne tačke krivih sa osom x desno od ishodišta?

15. NEKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE VIŠEG STEPENA. NEKI SISTEMI JEDNAČINA I NEJEDNAČINA DRUGOG I VIŠEG STEPENA

15.1. JEDNAČINE VIŠEG STEPENA

Zadaci (15.1—15.17)

Riješiti jednačine (15.1—15.15):

15.1. a) $x^3 - 1 = 0$; b) $x^3 + 1 = 0$.

15.2. a) $27x^3 - 8 = 0$; b) $2x^3 + 5 = 0$.

15.3. a) $x^4 + 4 = 0$; b) $x^4 - 9 = 0$.

15.4. a) $x^6 - 1 = 0$; b) $x^6 + 1 = 0$.

15.5. a) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$; b) $n^4 - 11n^2 + 30 = 0$, $(n \in N)$.

15.6. $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$.

15.7. $3x^3 - 7x^2 - 7x + 5 = 2$.

15.8. $2x^3 - 6x + 5 = 0$. Uputa: Staviti $x = y + \frac{1}{y}$.

15.9. $2a^2x + (x^2 + 2)a - (x^3 - 2x) = 0$.

15.10. a) $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$; b) $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0$.

15.11. a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$; b) $(x^2 - 6x - 9)^2 = x^3 - 4x^2 - 9x$.

15.12. $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18 = 0$.

15.13. a) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 3 = 0$; b) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$.

15.14. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = n(n-1)$, $(n \in N)$.

15.15.* $x^3 - [x] = 3$, gdje $[x]$ označava najveći cio broj koji nije veći od x.

15.16.* Pokazati put za rješavanje jednačine oblika

$$(x + a)^4 + (x + b)^4 = c,$$

gdje su a, b, c realni parametri. Na osnovu toga riješiti jednačinu

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 4.$$

15.17.* Naći cjelobrojna pozitivna rješenja jednačine

$$x^{2y} + (x + 1)^{2y} = (x + 2)^{2y}.$$

Zadaci (15.18—15.42)

Riješiti sisteme jednačina (15.18—15.22):

15.18. a) $x + y = 5$, $xy = 6$; b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, $x + y = 4$.

15.19. $x^2 + y^2 + 2x - 9 = 0$,
$x - 3y + 1 = 0$.

15.20. a) $x^2 + y^2 = 20$, $xy = 8$; b) $x^2 - y^2 = -2$, $xy = -\sqrt{3}$.

15.21. $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18$,
$x + y = 12$.

15.22. $x + y = a$,
$x^4 + y^4 = a^4$.

15.23. Naći realna rješenja sistema

$$y^2 + z^2 + 2ax = 3a^2,$$
$$x + y = 2a.$$

15.24. Naći koordinate tačaka presjeka prave $4x + 5y - 28 = 0$ i elipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

15.25. Odrediti presječne tačke kružnice

a) $x^2 + y^2 = \frac{289}{25}$ i elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$;

b) $x^2 + y^2 = \frac{289}{9}$ i hiperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

c) $x^2 + y^2 = 128$ i parabole $y = -\frac{1}{8}x^2$.

15.26. Riješiti u realnom području sistem
$|x| + |y| = 1 \wedge x^2 + y^2 = a$,
uz grafičku ilustraciju.

Riješiti sisteme jednačina (15.27—15.39):

15.27. $2x^2 + 5xy - 18y^2 = 0$,[1)]
$xy + y^2 - 12 = 0$.

15.28. $x^2 + y^2 = 45$,
$\frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{10}{3}$.

[1)] Polinom u prvoj jednačini datog sistema ima sve članove istog (drugog) stepena, pa kažemo da je *homogeni* polinom. Kada se on izjednači sa nulom, dobijemo *homogenu* jednačinu.

15.29. a) $x^2 + xy = 12$, $xy - y^2 = 2$; b) $x^2 - xy + y^2 = 3$, $2x^2 - xy - y^2 = 5$.

15.30. $x^2 - y^2 + 3y = 0$,
$x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0$.

15.31.* $16x^2 + 26xy + 34y^2 - 30x - 90y + 85 = 0$,
$11x^2 + 46xy + 14y^2 - 60x - 30y + 20 = 0$.

15.32. $x^3y + xy^3 = 78$,
$x^2 + y^2 = 13$.

15.33. (1) $x^4 + y^4 = 17(x + y)^2$,
(2) $xy = 2(x + y)$.

15.34.* $x^2y + y + xy^2 + x = 18xy$,
$x^4y^2 + y^2 + x^2y^4 + x^2 = 208x^2y^2$.

15.35. $xyz = 1$,

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) = 4.$$

15.36. a) $x - 2y + 3z = 9$, $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 189$, $3xz = 4y^2$; b) $x^2 + xy + y^2 = 7$, $y^2 + yz + z^2 = 19$, $z^2 + zx + x^2 = 13$.

15.37.* $\dfrac{2x_1^2}{1 + x_1^2} = x_2$, $\dfrac{2x_2^2}{1 + x_2^2} = x_3$, $\dfrac{2x_3^2}{1 + x_3^2} = x_1$.

15.38. $x^3 + y^3 - z^3 - xyz = -4$,
$x^3 - y^3 + z^3 - xyz = 8$,
$-x^3 + y^3 + z^3 - xyz = -2$.

15.39. $1 - x_1x_2 = 0$, $1 - x_2x_3 = 0, \ldots,$ $1 - x_nx_1 = 0$.

15.40. Ako je $(x, y, z) \in R \times R \times R$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, rješenje sistema

$$x + y + z = xyz$$
$$x^2 = yz,$$

tada je $x^2 \geqslant 3$. Dokazati.

15.41. Ako je $(x, y, z) \in R^3$ rješenje sistema

$$x + y + z = 5 \wedge yz + zx + xy = 8,$$

tada je $x, y, z \in \left[1, \frac{7}{3}\right]$. Dokazati.

15.42.* Treba odrediti sve realne vrijednosti parametara a i b tako da sistem

$$xyz + z = a,$$
$$xyz^2 + z = b,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

ima tačno jedno realno rješenje.

15.3. NEJEDNAČINE VIŠEG STEPENA

Zadaci (15.43—15.48)

Riješiti nejednačine:

15.43. a) $x^3 - x^2 < x^2 + x$; b) $|x^3 - x^2| < |x^2 + x|$.

15.44. a) $x^4 + 9x^2 - 10 < 0$; b) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 < 0$.

15.45. $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 11x + 30} > 0$.

15.46. a) $\dfrac{(x^2 + x + 1)(4 - x^2)}{2x^2 + 3x - 2} \geqslant 0$; b) $\dfrac{1 + x^3}{x - x^2 + x^3} > \dfrac{1 - x^2}{x}$.

15.47. a) $\left|\dfrac{x + 4}{3x + 2}\right| > \dfrac{1}{x}$; (1) b) $\left|\dfrac{2(x - 3)}{x - 2}\right| > x^2 - 4x + 3$.

15.48. $\dfrac{x}{x - m} - \dfrac{2m}{x + m} > \dfrac{8m^2}{x^2 - m^2}$.

15.4. NEJEDNAČINE DRUGOG STEPENA SA DVIJE NEPOZNANICE. SISTEMI NEJEDNAČINA DRUGOG I VIŠEG STEPENA

Kako se u ovoj tački razmatraju nejednačine drugog stepena sa dvije nepoznanice oblika $(x - p)^2 + (y - q)^2 \gtrless r^2$ ili $\dfrac{(x - p)^2}{a^2} \pm \dfrac{(y - q)^2}{b^2} \gtrless 1$ ili $(y - q)^2 \gtrless a(x - p)$ ili $(x - p)^2 \gtrless a(y - q)$ ili $(x - p)(y - q) \gtrless a$, riješićemo u obliku (opštih) primjera prethodno svaku od navedenih nejednačina.

Primjer 15.1. Neka je

(1) $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$

jednačina kružnice sa centrom $S(p, q)$ i poluprečnikom r. Tada za sve „unutrašnje" tačke kružnice vrijedi

(2) $(x - p)^2 + (y - q)^2 < r^2$

a za sve „spoljašnje" tačke

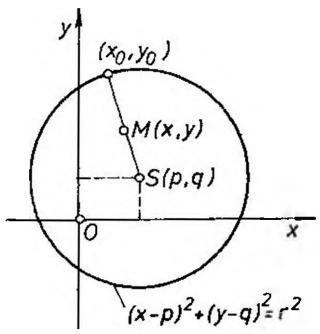
(3) $(x - p)^2 + (y - q)^2 > r^2$.

Dokaz. Neka je $M(x, y)$ unutrašnja tačka kružnice (1) (sl. 15.1). Tada zraka $\overrightarrow{SM}$ siječe kružnicu (1) u nekoj tački (x_0, y_0). Pri tome je

(4) $x - p = t(x_0 - p)$,
$y - q = t(y_0 - q)$, $0 \leqslant t < 1$,

dakle $(x - p)^2 + (y - q)^2 = t^2[(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2] = t^2 r^2 < r^2$.

Za tačke (x, y) izvan kružnice (1) imamo



Sl. 15.1.

(4') $x - p = t(x_0 - p),\ y - q = t(y_0 - q),\ t > 1,$

dakle

$(x-p)^2 + (y-q)^2 = t^2[(x_0-p)^2 + (y_0-q)^2] = t^2 r^2 > r^2.$

Primjer 15.2. Neka je

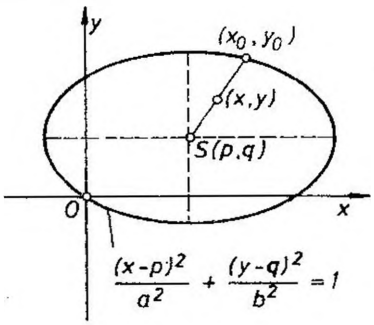
(1) $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} + \dfrac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

elipsa sa centrom $S(p, q)$ i poluosama (paralelnim sa koordinatnim osama) $a > 0$, $b > 0$ (sl. 15.2). Tada za svaku unutrašnju tačku (x, y) elipse (1) vrijedi

(2) $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} + \dfrac{(y-q)^2}{b^2} < 1,$

a za svaku spoljašnju tačku (x, y) te elipse vrijedi

(3) $\dfrac{(x-p)^2}{a^2} + \dfrac{(y-q)^2}{b^2} > 1.$



Sl. 15.2.

Dokaz je posve sličan onome u primjeru 15.1.

Primjer 15.3. Neka je

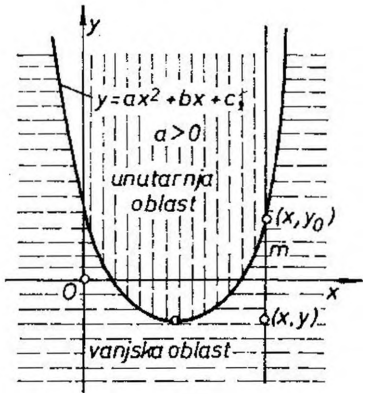
(1) $y = ax^2 + bx + c \quad (a > 0)$

jednačina parabole. Tada za sve "unutrašnje" tačke (x, y) parabole (1) vrijedi

(2) $ax^2 + bx + c < y$

a za sve "spoljašnje" tačke parabole (1)

(3) $ax^2 + bx + c > y.$



Sl. 15.3.

Dokaz. Neka je (x, y) proizvoljna tačka ravni xOy koja ne pripada paraboli (1). Prava m paralelna sa y-osom siječe parabolu (1) u nekoj tački (x, y_0) (sl. 15.3).

Zato je $y \lessgtr ax^2 + bx + c \Leftrightarrow y \lessgtr y_0,$

jer je $ax^2 + bx + c = y_0.$

Primjer 15.4. Neka je

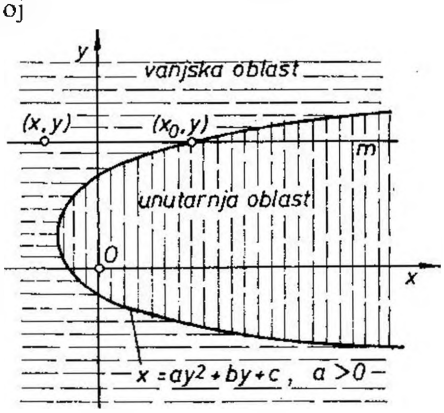
(1) $x = ay^2 + by + c \quad (a > 0)$

jednačina parabole. Tada za sve "unutrašnje" tačke (x, y) parabole (1) vrijedi

(2) $ay^2 + by + c < x$

a za sve "spoljašnje"

(3) $ay^2 + by + c > x.$



Sl. 15.4.

Dokaz je isti kao u primjeru 15.3, samo što se sada uzme prava m paralelna s x-osom. Ona siječe parabolu (1) u tački (x_0, y) (sl. 15.4).

Primjer 15.5. Neka je

$$(1)\quad \frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

jednačina hiperbole. Tada za sve "unutrašnje" tačke (x, y) hiperbole (1) vrijedi

$$(2)\quad \frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}>1$$

a za sve "spoljašnje"

$$(3)\quad \frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}<1.$$

Dokaz. Neka je (x, y) proizvoljna tačka xOy ravni (sl. 15.5). Tada prava m paralelna sa x-osom koja prolazi tačkom (x, y) siječe hiperbolu (1) u tačkama (x_1, y) i (x_2, y), $(x_1 < x_2)$. Osim toga

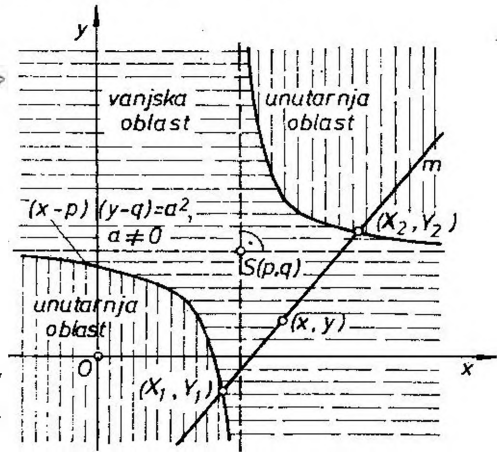
$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}>1 \Leftrightarrow \frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}>\frac{(x_i-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-p)^2}{a^2}>\frac{(x_i-p)^2}{b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-p<x_1-p \vee x_2-p<x-p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x<x_1 \vee x_2<x.$$

Sa slike se vidi da $x < x_1 \vee x_2 < x$ vrijedi upravo za "unutrašnje" tačke (x, y) hiperbole (1). Slično se dokazuje tvrdnja koja se odnosi na "spoljašnje" tačke hiperbole.



Sl. 15.5.

Primjer 15.6. Neka je

(1) $(x-p)(y-q)=a^2 \quad (a \neq 0)$

jednačina jednakostrane hiperbole sa centrom $S(p, q)$. Tada za "unutrašnje" tačke (x, y) te hiperbole vrijedi

$$(2)\quad (x-p)(y-q)>a^2$$

a za "spoljašnje"

$$(3)\quad (x-p)(y-q)<a^2.$$

Dokaz. Neka je (x, y) proizvoljna tačka xOy ravni (sl. 15.6). Tada prava

$$m \equiv Y-y=X-x$$

siječe hiperbolu (1) u tačkama (X_1, Y_1) i (X_2, Y_2). Osim toga

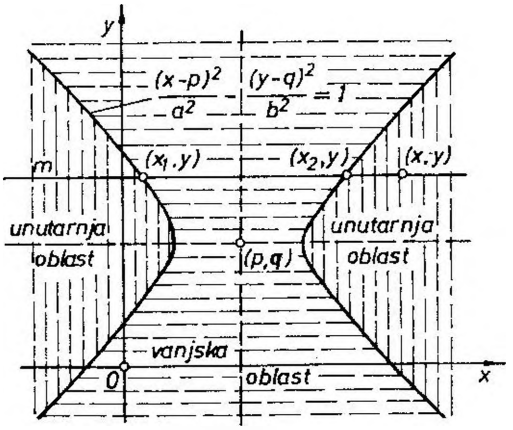
$$(x-p)(y-q)<a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-p)(y-q)<(X_i-p)(Y_i-q), \quad (i=1,2),$$

jer $a^2=(X_i-p)(Y_i-q), \quad (i=1,2)$.

Sa slike se vidi da je

$$(x-p)(y-q)<(X_i-p)(Y_i-q) \quad (i=1,2) \Leftrightarrow$$



Sl. 15.6.

$\Leftrightarrow (x, y)$ između tačaka
(X_1, Y_1) i $(X_2, Y_2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x, y)$ "spoljašnje" tačke hiperbole (1).

Zadaci (15.49—15.67)

15.49. Riješiti nejednačinu

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$; b) $x^2 - 3xy + 2y^2 < 0$.

15.50. Riješiti sistem nejednačina

$$x^2 + x \leqslant 12,$$
$$x^2 - x - 2 > 0.$$

15.51. Za koje vrijednosti parametra k je u cijelom realnom području (tj. $\forall\, x \in R$) tačna formula

$$-3 < \frac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 1} < 2?$$

15.52. Odrediti parametar λ tako da za svaku vrijednost $x \in R$ važi formula

$$\left| \frac{x^2 + (\lambda + 1)x + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3.$$

15.53. Dokazati da sistem

$$x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1,$$
$$x - y + a = 0$$

ima jedno i samo jedno rješenje ako je $a = 3$ ili ako je $a = -1$. Naći odgovarajuća rješenja.

15.54. Dokazati da sistem nejednačina

$$\sin x \geqslant \sqrt{3x^2 - 20x + 32} \wedge \cos x \geqslant x^2$$

nema rješenja.

15.55. Odrediti cjelobrojna rješenja sistema nejednačina

$$y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0 \wedge y + |x - 1| < 2.$$

Riješiti sisteme nejednačina uz grafičku ilustraciju (15.56—15.58):

15.56. $y - x > 0 \wedge y - x^3 < 0$.

15.57. a) $x^2 + y^2 < 9$, $|y| < 2$;

b) $9x^2 + 16y^2 \leqslant 144$, $3x + 4y - 22 \geqslant 0$.

c) $y^2 < 4x \wedge x^2 + y^2 - 4x > 0$.

15.58. a) $x - y + 2\sqrt{2} \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \geqslant 4$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$;

b) $x \geqslant 0$, $x^2 - y^2 > 0$, $2x^2 + y^2 \leqslant 3$.

15.59. U koordinatnoj ravni Oxy šrafirati skup tačaka, čije koordinate zadovoljavaju sljedeću nejednačinu (sa dvije nepoznate x i y):

a) $|xy| \leqslant 1$; b) $|y| + 2|x| \leqslant x^2 + 1$.

15.60. Riješiti nejednačinu

$$\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2} \geqslant 0.$$

15.61. Naći presjek $C = A \cap B$ skupova

a) $A = \{(x, y) : |x + y| < x^2\}$ i $B = \{(x, y) : x^2 - 2y^2 < 8\}$;

b) $A = \{(x, y) : x^2 - 3y + y^2 = 4\}$ i $B = \{(x, y) : |x - x^2| < y + 1\}$.

15.62. Naći diferenciju $C = B \setminus A$ skupova

a) $A = \{(x, y) : x^2 - 3x + y^2 < 4\}$ i $B = \{(x, y) : x - 3y + y^2 > 2\}$;

b) $A = \{(x, y) : 2x^2 + 4x + 3y^2 - 12y + 8 < 0\}$ i
$B = \{(x, y) : x^2 + 2x < 1 - y\}$.

15.63. Neka u polinomu $x^2 - 2ux - v^2$ parametri u i v predstavljaju koordinate tačke $M(u, v)$ u (pravouglom) koordinatnom sistemu Ouv.

a) Odrediti liniju koju određuju tačke M, uz uslov da su nule x_1 i x_2 polinoma suprotni brojevi.

b) Odrediti oblast ravni koordinatnog sistema Ouv koju prekrivaju tačke M, uz uslov da se nule x_1 i x_2 polinoma nalaze između -1 i 1.

15.64. Dat je trinom $f(x) = mx^2 + nx - 4$. Ako m i n znače koordinate tačke M u pravouglom koordinatnom sistemu mOn, odrediti oblast tačaka M tako da trinom $f(x)$ ima obje nule x_1 i x_2 veće od 2.

15.65. Naći grafički i opisati analitički oblasti ravni u koordinatnom sistemu xOy u kojima izraz

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \frac{\log(2 - y)}{\sqrt{y - x^2}}$$

ima realne vrijednosti.

15.66. Data je jednakost

$$f(x) = x^2 - vx - u,$$

u kojoj su u i v realni parametri. Odrediti skup tačaka $X(u, v)$ koordinatne ravni Ouv tako da:

a) jednačina $f(x) = 0$ ima jednaka rješenja;

b) jedno i samo jedno rješenje jednačine $f(x) = 0$ bude jednako 1;

c) oba rješenja jednačine $f(x) = 0$ po apsolutnoj vrijednosti budu manja od 1.

15.67. Neka su u jednačini $x^2 - (m - 2)x + n^2 - m + 2 = 0$ m i n realni parametri. Treba odrediti oblast tačaka P u ravni za čije koordinate m i n u koordinatnom sistemu mOn jednačina ima:

a) realna rješenja,

b) oba rješenja u intervalu $(-1, 1)$.

16. IRACIONALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. SISTEMI IRACIONALNIH JEDNAČINA

16.1. IRACIONALNE JEDNAČINE

Ovdje ćemo rješavati iracionalne jednačine u realnom području, tj. i koeficijenti i nepoznate su u skupu R.

a) *Iracionalne jednačine sa neparnim korijenima*

Pri rješavanju ovakvih jednačina (da bismo se "oslobodili" korijena), koristimo se sljedećom teoremom:

Teorema 16.1. Jednačine

$$f(x) = g(x) \quad \text{i} \quad f^n(x) = g^n(x)$$

su ekvivalentne za neparan broj $n\,(n \in N)$.

Primjer 16.1. Riješiti iracionalnu jednačinu

$$\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1.$$

Rješenje. Definiciono područje date jednačine je skup R. Prema teoremi 16.1. data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$(\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16})^3 = 1^3,$$

odakle slijedi:

$$x + 45 - 3\sqrt[3]{x+45} \cdot \sqrt[3]{x-16}\,(\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16}) - (x-16) = 1.$$

Nakon zamjene

$$\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$$

i nakon sređivanja dobija se jednačina

$$20 = \sqrt[3]{x^2 + 29x - 720},$$

odnosno

$$x^2 + 29x - 8720 = 0.$$

Rješenja ove jednačine su

$$x_1 = -109,\ x_2 = 80,$$

a uvrštavanjem ovih vrijednosti u datu jednačinu uvjeravamo se da su to i njena rješenja.

b) *Iracionalne jednačine sa parnim korijenima*

Primjer 16.2. Riješimo sada iracionalnu jednačinu

(1) $\sqrt{2x-1} = x-2.$

Rješenje. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$S:\ \begin{cases} (2) & 2x-1 \geqslant 0, \\ (3) & x-2 \geqslant 0, \\ (4) & 2x-1 = (x-2)^2. \end{cases}$$

Naime, rješenja moraju pripadati domeni jednačine (1), koju određuje uslov (2). Uz taj uslov je $\sqrt{2x-1} \geqslant 0$ (jer je to aritmetički korijen), pa rješenja moraju pripadati oblasti u kojoj je zadovoljen uslov (3). Uz uslove (2) i (3) jednačina (1) je ekvivalentna jednačini (4) u kojoj smo se "oslobodili" korijena.

Ova ekvivalentnost je posljedica sljedeće teoreme.

Teorema 16.2. Za paran n su jednačine

$$f(x) = g(x) \quad \text{i} \quad f^n(x) = g^n(x)$$

ekvivalentne u oblasti u kojoj je $f(x) \geqslant 0$ i $g(x) \geqslant 0$, ili $f(x) < 0$ i $g(x) < 0$.

Uočimo da je uslov (2) sadržan u uslovu (4), jer je $(x-2)^2 \geqslant 0$ za sve vrijednosti $x \in R$. Prema tome, jednačina (1) je ekvivalentna sistemu

$$S_1:\ \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 2x-1 = (x-2)^2. \end{cases}$$

Rješenje ovog sistema, pa i date jednačine, je

$$x = 5;$$

uvrštavanjem u jednačinu (1) uviđamo da je to stvarno i njeno rješenje.

Primjer 16.3. Riješiti jednačinu

(1) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = (a+1)\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

Rješenje. Definiciono područje

$$x \geqslant 1$$

određujemo iz uslova $x > 0$ i $x - \sqrt{x} \geqslant 0$. Pošto je, uz uslov $x \geqslant 1$, $\sqrt{x+\sqrt{x}} > 0$, nakon množenja date jednačine sa $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ i nakon sređivanja, dobijemo ekvivalentnu jednačinu

$$\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - \sqrt{x-1} - a) = 0.$$

Ova jednačina je, uz uslov $x \geqslant 1$, ekvivalentna jednačini

$$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = a.$$

Pošto je za svaku vrijednost $x \in R$, $x > x-1$, to je, također, za $x \geqslant 1$, $\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$, pa iz posljednje jednačine zaključujemo da parametar a mora zadovoljavati uslov

$$a > 0.$$

Ako sada u posljednjoj jednačini izraz $\sqrt{x-1}$ prebacimo na desnu stranu i dobijenu jednačinu kvadriramo, dobijemo ekvivalentnu jednačinu

(2) $2a\sqrt{x-1} = 1 - a^2.$

Pošto je, uz uslove $x \geqslant 1$ i $a > 0$, $2a\sqrt{x-1} \geqslant 0$, iz jednačine (2) zaključujemo da parametar a mora zadovoljavati uslov $1 - a^2 \geqslant 0$, tj.

$$|a| \leqslant 1.$$

Iz uslova $a > 0$ i $|a| \leqslant 1$, slijedi uslov

$$0 < a \leqslant 1.$$

Kada (uz uslove $x \geqslant 1$ i $0 < a \leqslant 1$) kvadriramo jednačinu (2) i sredimo, dobijemo da je

$$(3) \quad x = \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2.$$

Ovo je rješenje jednačine (2), uz uslov da je $0 < a \leqslant 1$. Da bi vrijednost (3) bila rješenje date jednačine (1), treba da pripada definicionom području, tj. treba da je

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2 \geqslant 1.$$

Pokazuje se da je ova formula tačna za sve vrijednosti $a \neq 0$, jer se ona svodi na ekvivalentnu a tačnu formulu

$$\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Prema tome, za sve vrijednosti parametra $a \in (0,1]$ jednačina (1) ima rješenje

$$x = \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2,$$

a za ostale vrijednosti parametra a ona nema rješenja.

Napomena 16.1. Uvrštavanje nađene vrijednosti za nepoznatu u datu jednačinu obavezno je, bez obzira da li smo pri rješavanju jednačine postavljali uslove koji obezbjeđuju ekvivalentnost jednačina (na primjer, određivanje definicionog područja). Mogli smo, naime, negdje u računu pogriješiti.

Zadaci (16.1—16.30)

Riješiti sljedeće jednačine:

16.1. $\sqrt{5x+4} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{10x-6}$.

16.2. $\sqrt{1-x} = |x-1|$.

16.3. $1 - x + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2-24}} = 0$.

16.4. $\sqrt{x^2+4x+8} + \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{2(x^2+4x+6)}$.

16.5. $\sqrt{2x^2+21x-11} - \sqrt{2x^2-9x+4} = \sqrt{18x-9}$.

16.6. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

16.7. $2\sqrt{2x+\sqrt{x}} = 3\sqrt{\frac{x}{2x+\sqrt{x}}} + 2\sqrt{2x-\sqrt{x}}.$

16.8. $\sqrt{10+x+6\sqrt{x+1}} + \sqrt{5-x+2\sqrt{4-x}} = 7.$

16.9. $1-\sqrt{x} = \sqrt{x-\sqrt{1-x}}.$

16.10. $4x^4+1 = 4x\sqrt{2}\sqrt{x^4-\frac{1}{4}}.$

Riješiti sljedeće jednačine koje sadrže parametre:

16.11. $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a, \quad a \in R.$

16.12. $k^2 - x^2 = \sqrt{x^2+k}(k+x).$

16.13. $\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x, \quad p \in R.$

16.14.* $x = a + \sqrt{a+\sqrt{x}}.$

16.15. $\frac{\sqrt{a+x}}{a} + \frac{\sqrt{a+x}}{x} = \sqrt{x}.$

16.16. $\frac{\sqrt{a^2+x}+b}{\sqrt{a^2+x}-a} + \frac{a}{b} = 0.$

16.17. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \sqrt{b}, \quad a > 0.$

Riješiti sljedeće jednačine:

16.18. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$

16.19. $\sqrt[3]{2x+17} - \sqrt[3]{2x-37} = 6.$

16.20. $\sqrt[3]{4x^2+10x+4} + \sqrt[3]{2x^2-5x-3} = \sqrt[3]{2x+1}.$

16.21. $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} = 12.$

16.22. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$

16.23.* $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}.$

16.24. $\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[6]{a^2-x^2}.$

16.25. $\sqrt{x-1} + 6\sqrt[4]{x-1} = 16.$

16.26. $\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left[\frac{1-a^2}{(1+a)^2}\right]^{\frac{1}{4}}.$

16.27. $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x}.$

16.28. $\dfrac{(a-x)\sqrt[4]{x-b}+(x-b)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}}=\dfrac{a-b}{2}.$

16.29.* $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[5]{(x-1)(x-33)}=1.$

16.30. $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}.$

16.2. SISTEMI JEDNAČINA OD KOJIH JE BAR JEDNA IRACIONALNA

Zadaci (16.31—16.38)

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

16.31. $x+y=72 \wedge \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6.$

16.32. $2y-1=\sqrt{x^2-2x+1} \wedge y^2=1-|x|.$

$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=7(\sqrt{x}+\sqrt{y}).$

16.33. $\sqrt{xy}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,$

$x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=2.$

16.34. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=2{,}5 \wedge x+y=10.$

16.35. $\sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}}+2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=3 \wedge x+xy+y=7.$

16.36. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=1+\dfrac{7}{\sqrt{xy}} \wedge \sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}=78.$

16.37.* $\dfrac{2xy+y\sqrt{x^2-y^2}}{14}=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{2}},$

$\sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3}+\sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3}=9.$

16.38. Dat je sistem jednačina

$$\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=\sqrt{3} \wedge x-y=1.$$

a) Odrediti analitički i grafički definiciono područje datog sistema;

b) ustanoviti da je dvojka

$$x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

rješenje prve jednačine datog sistema;

c) riješiti dati sistem.

16.3. IRACIONALNE NEJEDNAČINE

Ako u nejednačini figurišu neparni korijeni, njeno je rješavanje lagano. Ako su svi korijeni parni, treba imati na umu sljedeću teoremu.

Teorema 16.3. a) Nejednačina $f(x) < g(x)$ je posljedica sistema $f(x) \leqslant 0 \wedge g(x) > 0$, tj. nju zadovoljavaju sva rješenja ovog sistema.

b) Nejednačine

$$f(x) < g(x) \quad \text{i} \quad f^n(x) < g^n(x)$$

su, za paran n, ekvivalentne u oblasti u kojoj je $f(x) \geqslant 0$ i $g(x) > 0$.

c) Nejednačine

$$f(x) < g(x) \quad \text{i} \quad f^n(x) > g^n(x)$$

su, za paran n, ekvivalentne u oblasti u kojoj je $f(x) < 0$ i $g(x) \leqslant 0$.

Primjer 16.4. Riješiti nejednačinu

(1) $\sqrt{2x-1} < x-2$.

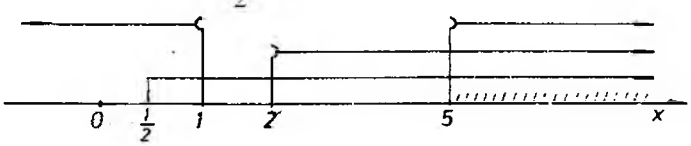
Rješenje. Umjesto date nejednačine rješavamo njoj ekvivalentan sistem

$$S: \begin{cases} (2)\ 2x-1 \geqslant 0, \\ (3)\ x-2>0, \\ (4)\ 2x-1<(x-2)^2. \end{cases}$$

Uslovom (2) određuje se definiciono područje nejednačine (1), uslov (3) određuje područje kome moraju pripadati rješenja (jer je, uz uslov (2), $\sqrt{2x-1} \geqslant 0$, pa nejednačinu (1) ne može zadovoljavati nijedna vrijednost x za koju je $x-2 \leqslant 0$). Nejednačina (4) je jednostavnija od (1), a ekvivalentna joj je uz uslov (3) na osnovu teoreme 16.3. b).

Za rješenja sistema S, odnosno date nejednačine (1) vrijedi:

$$x \geqslant \frac{1}{2} \wedge x > 2 \wedge (x < 1 \vee x > 5),$$



pa je skup rješenja

$$\mathscr{R} = (5, +\infty).$$

Primjer 16.5. Riješiti nejednačinu

(1) $\sqrt{2x-1} > x-2$.

Rješenje. Data nejednačina ekvivalentna je skupu od ova dva sistema nejednačina:

$$S: \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ x-2<0 \end{cases} \quad \text{i} \quad S_1: \begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ x-2 \geqslant 0, \\ 2x-1>(x-2)^2. \end{cases}$$

na osnovu teoreme 16.3. a) i b).

Skup rješenja sistema S je

$$\mathscr{R}_1 = \left[\frac{1}{2}, 2\right).$$

Uočimo da je u sistemu S_1 uslov $2x - 1 \geqslant 0$ suvišan, jer je sadržan u uslovu $2x - 1 > (x-2)^2$, a skup rješenja tog sistema je

$$\mathscr{R}_2 = \left[2, 5\right).$$

Zato je skup rješenja date nejednačine

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 = \left[\frac{1}{2}, 5\right).$$

Napomena 16.2. Ako iracionalna nejednačina ima rješenja, ima ih beskonačno mnogo, pa ih ne možemo provjeravati. Obavezno je, međutim, u radu postavljati uslove za nepoznatu, odnosno za parametre uz koje se čuva ekvivalencija nejednačina, koje se pojavljuju u toku rješavanja.

Primjer 16.6. Riješimo još nejednačinu

$$(1)\quad \sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} < \sqrt{2a+x}$$

u kojoj figuriše parametar a.

Rješenje. Definiciono područje određujemo iz uslova

$$(2)\quad \begin{array}{l} a + x > 0 \Leftrightarrow x > -a, \\ 2a + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -2a. \end{array}$$

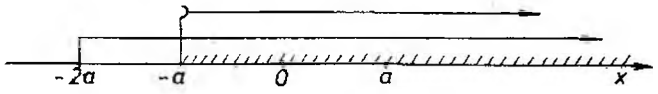
1^0 Ako je $a = 0$, tada iz uslova (2) slijedi da je nejednačina (1) definisana za vrijednosti $x > 0$. Ako, međutim, u datu nejednačinu uvrstimo vrijednost $a = 0$, dobijemo nejednačinu

$$\sqrt{x} < \sqrt{x}$$

koja, očito, nema rješenja.

2^0 Ako je $a > 0$, tada iz uslova (2) slijedi da je data nejednačina definisana za

$$x > -a.$$



Uz uslov $x > -a$ je $\sqrt{a+x} > 0$, pa možemo množiti datu nejednačinu sa $\sqrt{a+x}$. Nakon sređivanja dobijemo ekvivalentnu nejednačinu

$$(2)\quad a + x - |a| < \sqrt{2a^2 + 3ax + x^2},$$

odnosno

$$x < \sqrt{x^2 + 3ax + 2a^2}.$$

Posljednja nejednačina je iste vrste kao ona u primjeru 16.5, pa je ekvivalentna skupu od ova dva sistema:

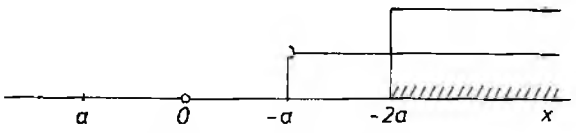
$$x \geqslant 0,$$
$$S: \quad x < 0 \quad \text{i} \quad S_1: \quad x^2 < x^2 + 3ax + 2a^2.$$

U slučaju 2^0, tj. ako je $a > 0$, imamo ovaj skup rješenja:

$$\mathscr{R} = (-a, +\infty).$$

3^0 Ako je $a < 0$, nejednačina (1) je definisana za

$$x \geqslant -2a.$$



Uz taj uslov nejednačina (1) je ekvivalentna nejednačini (2), iz koje slijedi nejednačina

$$2a + x < \sqrt{x^2 + 3ax + 2a^2}.$$

Pošto je $x \geqslant -2a$ (tada je $2a + x \geqslant 0$), otpada slučaj $2a + x < 0$, pa je posljednja nejednačina ekvivalentna sistemu

$$2a + x \geqslant 0,$$
$$(2a + x)^2 < x^2 + 3ax + 2a^2.$$

Konačno, u slučaju 3^0, tj. ako je $a < 0$ imamo ovaj skup rješenja:

$$\mathscr{R} = (-2a, +\infty).$$

Rezultat:
Ako je $a = 0$, nejednačina nema rješenja;
ako je $a > 0$, skup rješenja je $\mathscr{R} = (-a, +\infty)$;
ako je $a < 0$, skup rješenja je $\mathscr{R} = (-2a, +\infty)$.

Zadaci (16.39—16.55)

Riješiti sljedeće nejednačine:

16.39. $\sqrt{x-6} + \sqrt{1-x} \leqslant \sqrt{2x-1}$.

16.40. $\sqrt{5x+4} + \sqrt{5x-4} > \sqrt{10x-6}$.

16.41. $\sqrt{(x-2)(x+7)} > x + 1$.

16.42. $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3$.

16.43. $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} > 2$.

16.44. $\sqrt{\frac{x}{x-2}} - \sqrt{\frac{x-2}{x}} > \frac{1}{x}$.

16.45. $\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$.

16.46. $\sqrt{2+x} - \frac{2}{\sqrt{2+x}} < 2\sqrt{4+x}$.

16.47. $\sqrt{x-\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$.

16.48. $2\sqrt{\frac{x-1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

16.49. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} < \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1+x}}$.

16.50. $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} > \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+x}}$.

Riješiti sljedeće nejednačine koje sadrže realne parametre:

16.51. $\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{2ax-x^2} > a$.

16.52. $2x + ax + \sqrt{x} > 0$.

16.53. $\sqrt{\frac{a}{x}-1} + \sqrt{\frac{x}{a}+1} < \sqrt{\frac{2a}{x}}$.

16.54. $\sqrt[2n]{\frac{2a-x}{a+x}} - 2\sqrt[2n]{\frac{a+x}{2a-x}} + 1 > 0$.

16.55. Dokazati da su rješenja nejednačine

$(x-a)\sqrt{x+a} < x^2 - a^2$

sve vrijednosti $x \in (-a, 1-a) \cup (a, +\infty)$ za $a > \frac{1}{2}$.

17. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA. EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

17.1. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

Posmatrajmo formulu

$$f(x) = a^x, \quad a \in R, \quad x \in R.$$

Ta formula za $a < 0$ određuje funkciju koja je definisana samo za racionalne vrijednosti $x = \frac{p}{q}$, gdje su p i q relativno prosti cijeli brojevi i q neparan. Ako je $a = 0$, tada je izraz a^x definisan samo u skupu R^+, i tada je $a^x = 0$.

Zato je od interesa posmatrati samo slučaj kada je $a > 0$ i to $a \neq 1$, jer za $a = 1$ je $a^x = 1$ za sve vrijednosti $x \in R$. Formulom

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1$$

određena je eksponencijala funkcija čija je domena skup R, a skup vrijednosti skup R^+.

Često se posmatra eksponencijalna funkcija

$$f(x) = e^x,$$

gdje je $e = 2{,}718\ldots$ iracionalan broj.

Eksponencijalna funkcija je bijektivna, pa jednakim eksponentima, za istu bazu, odgovaraju jednake vrijednosti funkcije i obrnuto, tj.

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}. \tag{17.1}$$

Ako je $a > 1$ funkcija je monotono rastuća (sl. 17.1), tj.

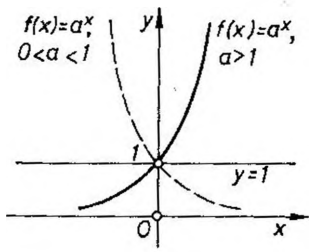
$$\text{za } a > 1 \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}. \tag{17.2}$$

a za $a < 1$ ona je monotono opadajuća (sl. 17.1), tj.

$$\text{za } 0 < a < 1, \quad x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}. \tag{17.3}$$

Ako je $x = 0$, tada je $a^x = 1$ za sve $a > 0$.

Za $a > 1$ u intervalu $(-\infty, 0)$ je $0 < a^x < 1$, a za $0 < a < 1$ je $a^x > 1$. U intervalu $(0, +\infty)$ za $a > 1$ je $a^x > 1$, a za $0 < a < 1$ je $0 < a^x < 1$.



Sl. 17.1.

Zadaci (17.1—17.6)

17.1. Odrediti domen, nule, znak i intervale monotonosti realnih funkcija datih sljedećim formulama:

a) $f(x) = 2^x - 1$; b) $f(x) = 3 \cdot 2^x - 2$;

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$; d) $f(x) = \sqrt{e^{-x} - 1}$.

Prikazati grafički funkcije date formulama:

17.2. a) $f(x) = 2^x + 1$; b) $f(x) = 2^{|x|} + 1$;

c) $f(x) = 2^{(|x|+x)/x}$; d) $f(x) = \sqrt[x]{2}$;

e) $f(x) = 2^{|x-1|}$.

17.3. a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$; b) $f(x) = \left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right|$;

c) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; d) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}$.

17.4. a) $f(x) = e^{x^2}$; b) $f(x) = e^{-x^2}$;

c) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; d) $f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1, & x < 0, \\ \sqrt{4x - x^2}, & x \geqslant 0 \end{cases}$.

17.5. Date su realne funkcije jedne realne promjenljive:

$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, $(a > 0)$, $g(x) = 2^x - 2^{-x}$, $h(x) = \sqrt{2^x - 2^{-x}}$.

a) Ispitati koja je od datih funkcija parna, a koja je neparna.

b) Dokazati da je $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot f(y)$.

17.6. Neka je a pozitivan realan broj različit od 1. Definišimo realne funkcije s, c, t sljedećim formulama:

$$s(x) = (a^x - a^{-x})/2, \quad c(x) = (a^x + a^{-x})/2, \quad t(x) = (a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}).$$

Dokazati da vrijedi:

a) $c^2(x) - s^2(x) = 1$; b) $s(2x) = 2s(x)c(x)$; c) $c(2x) = c^2(x) + s^2(x)$;

d) $t(2x) = 2t(x)/(1 + t^2(x))$,

za svako x iz R.[1)]

[1)] Za $a = e$ funkcije s, c i t zovemo "sinus hiperbolni", "kosinus hiperbolni" i "tangens hiperbolni" i označavamo ih sh, ch i th.

17.2. EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE

Najčešće je moguće datu eksponencijalnu jednačinu svesti na oblik

(1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

a) Ako je $a = 0$, tada je jednačina (1) ekvivalentna sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0,$$

koji, u stvari, određuje domenu jednačine (1).

b) Ako je $a = 1$, tada su rješenja jednačine (1) sve vrijednosti $x \in R$ za koje su izrazi $f(x)$ i $g(x)$ definisani.

c) Ako je $0 < a \neq 1$, jednačina (1) je, na osnovu formule 17.1, ekvivalentna jednačini

(2) $f(x) = g(x)$.

d) Ako je $a < 0$, tada su rješenja jednačine (1) samo ona rješenja jednačine (2) za koje oba izraza $f(x)$ i $g(x)$ primaju racionalne vrijednosti $\frac{p}{q}$, gdje su p i q relativno prosti cijeli brojevi i q neparan broj (vidi definisanost stepena a^x).

Primjer 17.1. Riješiti jednačinu

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

Rješenje. Jednačina je definisana na cijelom skupu R. Dalje imamo:

$$3 \cdot 4^x - 6 \cdot 4^x \cdot 4 = -\frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 9^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -21 \cdot 4^x = -9^x \left(\frac{9}{2} + 27\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{63}{42} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Primjer 17.2. Riješiti jednačinu

$$(x-1)^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)^{x-1}}.$$

Rješenje. Jednačina je definisana za vrijednosti $x > 1$, a možemo je napisati u obliku

(1) $(x-1)^{\sqrt{x-1}} = (x-1)^{\frac{x-1}{2}}$.

1° Neka je baza $x - 1 = 1$, tj.

$$x = 2.$$

Tada je, prema slučaju b), rješenje $x = 2$, jer su izrazi $f(x) = \sqrt{x-1}$ i $g(x) = \frac{x-1}{2}$ za tu vrijednost definisani.

2^0 Neka je sada $0 < x - 1 \neq 1$, tj.

$$1 < x \neq 2.$$

Uz taj uslov jednačina (1) ekvivalentna je (prema slučaju c)) jednačini

$$\sqrt{x-1} = \frac{x-1}{2},$$

čija su rješenja

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5.$$

Vrijednost $x = 1$ nije rješenje date jednačine, jer ne zadovoljava uslov $1 < x \neq 2$.

Rezultat:

$$x = 2, \ . \ x = 5.$$

Napomena 17.1. Katkad se eksponencijalna jednačina svede na oblik

$$a^{f(x)} = b^{g(x)},$$

kod koga baze a i b stepena nisu jednake. Tada se, jednačina zamijeni jednačinom

$$f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b,$$

uz uslove $0 < a \neq 1$ i $0 < b \neq 1$.

Zadaci (17.7—17.27)

Riješiti sljedeće jednačine:

17.7. $4^x - 4^{x-2} = 240.$

17.8. $0{,}04 = \sqrt[2x]{5}.$

17.9. $\sqrt{32^{4x-6}} = 0{,}25 \cdot 128^{2x-3}.$

17.10. $2^{3x-2} = 5^{x-\frac{2}{3}}$

17.11. $3^x \cdot 4^x = 5^x.$

17.12. Riješiti u realnom području jednačinu

$$a^{x^2+2x-8} = b^{-\frac{1}{2}x^2+5x-8},$$

gdje je $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Riješiti sljedeće jednačine:

17.13. a) $3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2\,192;$

b) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$

17.14. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29.$

17.15. $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0.$

17.16. $2^{4x} - 2^{3x+1} - 2^{2x} + 2^{x+1} + 1 = 0$.

17.17. Za koje vrijednosti parametara a i m jednačina

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = m$$

ima rješenje?

Riješiti sljedeće jednačine:

17.18. $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$.

17.19. $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

17.20.* $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1}$.

17.21.* $1 + 3^{\frac{x}{2}} = 2^x$.

17.22. $\left|3^{x+2} - 1\right| = 3^{x+2} - 1$.

17.23. $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$.

17.24.* $2^x = 3 - x$.

17.25. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

17.26.* Za koje vrijednosti parametra a jednačina

$$|x + 2| - |2x + 8| = a^x$$

a) ima tačno jedno rješenje;

b) ima više od jednog rješenja;

c) nema rješenja?

17.27. Riješiti u skupu N jednačinu

$$(3 + 4i)^{x-1} - (1 + i)^4 = 5^x,$$

gdje je i imaginarna jedinica.

17.3. SISTEMI JEDNAČINA OD KOJIH JE BAR JEDNA EKSPONENCIJALNA

Zadaci (17.28—17.37)

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

17.28. $3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}$, $y - x = 2$.

17.29. a) $\sqrt[y]{5^{x^2}} = 25^y \cdot \sqrt[y]{125^x}$, $\sqrt[x]{64} \cdot \sqrt[y]{8} = \sqrt[y]{2^x}$;

b) $5^x \cdot 8^y = 512000$, $x + y = 7$.

17.30. $3^x \cdot 5^y = 75,\ 3^y \cdot 5^x = 45.$

17.31. $2^{\frac{x-y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6,\quad x^2 + 5y^2 = 6xy.$

17.32. $64^{2x} + 64^{2y} = 12,\quad 64^{x+y} = 4\sqrt{2}.$

17.33. $x^{xy} = y^{xy},\ y = x^{\frac{1}{x}}.$

17.34.* $x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2,$
$2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1.$
(*Uputa*: Iz druge jednačine izdvojiti faktor 2^{x+2y}.)

17.35.* Za koje vrijednosti parametra $a \in R$ sistem

$$2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a,$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

ima jedno i samo jedno rješenje?

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

17.36. $2^x \cdot 3^y = 18,$
$4^x \cdot 5^z = 500,$
$6^y \cdot 7^z = 12348.$

17.37. $z^x = x,\ z^y = y,\ y^y = x.$

17.4. EKSPONENCIJALNE NEJEDNAČINE

Najčešće se data eksponencijalna nejednačina može svesti na oblik

(1) $a^{f(x)} < a^{g(x)}.$

a) Nejednačine ne posmatramo ako je $a < 0$, tj. uvijek uzimamo da je $a \geqslant 0$.

b) Ako je $a = 0$ ili $a = 1$, nejednačina (1) nema rješenja.

c) Ako je $a > 1$, nejednačina (1) je, prema formuli (17.2), ekvivalentna nejednačini

$$f(x) < g(x),$$

a ako je $0 < a < 1$, ona je ekvivalentna, prema formuli (17.3), nejednačini

$$f(x) > g(x).$$

Primjer 17.3. Riješiti nejednačinu

$$2^{2x^2} + 25^{\frac{x^2-1}{2}} > 5^{x^2}.$$

Rješenje. Data nejednačina je definisana na skupu R i ekvivalentna je sljedećim nejednačinama:

$$4^{x^2} + 5^{x^2-1} > 5^{x^2},$$
$$4^{x^2} > \frac{4}{5} \cdot 5^{x^2},$$
$$\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2} > \frac{4}{5}.$$

Pošto je osnova $\frac{4}{5} < 1$, prema slučaju c) ova je nejednačina ekvivalentna nejednačini

$$x^2 < 1,$$

pa je skup rješenja date nejednačine

$$\mathscr{R} = (-1, 1).$$

Naglasimo da napomena, slična napomeni 17.1, vrijedi i za eksponencijalne nejednačine.

Zadaci (17.38—17.44)

Riješiti sljedeće nejednačine:

17.38. $\frac{1}{25^{3-x}} - 625^{1-2x} < 0.$

17.39. $\left(\frac{1}{2}\right)^{(x^6-2x^3+1)^{\frac{1}{2}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

17.40. $|2^{x+1} - 1| > 2^{x+1}.$

17.41. $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| > 2^{x+1} + 1.$

17.42. $4^x \leqslant 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{\sqrt{x}+1}.$

17.43. $|2x|^{x^2-x-2} > 1.$

17.44. $|1 + 4i - 2^{-x}| < 5,$
gdje je i imaginarna jedinica.

18. LOGARITAMSKA FUNKCIJA. LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. SISTEMI LOGARITAMSKIH JEDNAČINA

18.1. LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Eksponencijalna funkcija

$$f: R \to R^+, f(x) = a^x, \quad 0 < a \neq 1 \, (x \in R)$$

je bijektivna, pa postoji njoj inverzna funkcija

$$f^{-1}: R^+ \to R, \; f^{-1}(x) = \log_a x, \quad 0 < a \neq 1, (x \in R^+)$$

koju zovemo *logaritamska* funkcija.

Na osnovu definicije logaritma vrijedi ekvivalencija

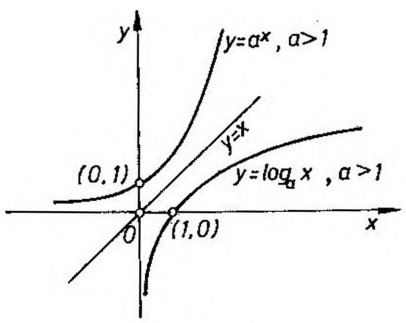
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \; x > 0, \tag{18.1}$$

a odavde se vidi da vrijede i ove formule:

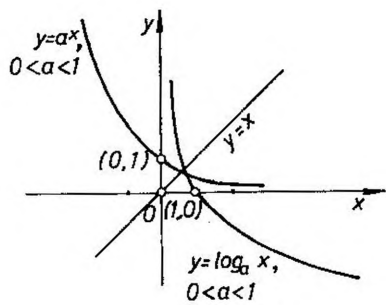
$$\log_a a^y = y, \quad a^{\log_a x} = x. \tag{18.1'}$$

Najčešće se upotrebljavaju *dekadski* logaritmi, sa oznakom $\log x$, čija je baza 10 i *prirodni* logaritmi $\ln x$ čija je baza broj $e = 2{,}718\ldots$

Na slici 18.1. nacrtani su grafici eksponencijalne i njoj inverzne logaritamske funkcije za bazu $a > 1$, a na slici 18.2. je to učinjeno na bazu $0 < a < 1$. Ti su grafici, naravno, simetrični prema simetrali $y = x$ prvog i trećeg kvadranta koordinatne ravni.



Sl. 18.1.



Sl. 18.2.

Istaknimo osnovne osobine logaritamske funkcije.

U skupu R postoje samo logaritmi pozitivnih brojeva.

Logaritamska funkcija je bijektivna, pa jednakim brojevima (numerusima) pripadaju jednaki logaritmi za istu bazu i obrnuto, tj.

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2. \tag{18.2}$$

Za znak logaritamske funkcije vrijedi:

za $a > 1$: $(0 < x < 1) \Leftrightarrow \log_a x < 0$; $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$;

za $0 < a < 1$: $(0 < x < 1) \Leftrightarrow \log_a x > 0$; $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$.

Broj 1 je nula, i to jedina, svake logaritamske funkcije, tj. za svaku bazu $0 < a \neq 1$. Vrijedi, dakle:

$$\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1. \tag{18.3}$$

Za $a > 1$ funkcija je monotono strogo rastuća, tj.

$$\text{za } a > 1: x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2, \tag{18.4}$$

a za $0 < a < 1$ ona je monotono strogo opadajuća, tj.

$$\text{za } 0 < a < 1: x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2. \tag{18.5}$$

Zadaci (18.1—18.16)

18.1. Nacrtati grafike sljedećih funkcija

a) $y = \ln x^3$; b) $y = \ln|x|$; c) $y = \ln x^2$.

18.2. Data je funkcija f formulom

$$f(x) = \ln|2x - 5|.$$

Odrediti "maksimalne" podskupove skupa R na kojima je funkcija f bijektivna, pa u tim oblastima naći inverznu funkciju. Nacrtati i grafik funkcije f.

18.3. Odrediti definicionu oblast izraza

$$\log_{2-x}\left(\sqrt{x+1} - \frac{x-2}{\sqrt{2x}}\right).$$

18.4. Za koje vrijednosti x izraz

$$\log \frac{4x^3 - 12x^2 - x + 3}{4x - 1 - 4x^2}$$

ima realne vrijednosti?

18.5. Treba odrediti vrijednost funkcije f date formulom

$$f(x) = \log_2(\log_3(\log_4((4^x)^{(x^x)})))$$

u tački $x = 3$. Šta je definiciono područje funkcije f?

18.6. Naći $\log_6 9$ ako je $\log_6 2 = a$.

18.7. Koji je između brojeva $\log_2 3$ i $\log_3 4$ veći?

18.8. Treba dokazati tačnost jednakosti

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{n+1} n = \log_{n+1} 2.$$

18.9. Ako je $a^2 + b^2 = 11ab$ i $ab \neq 0$, tada je

$$\log \frac{|a-b|}{3} = \frac{1}{2}(\log|a| + \log|b|).$$

Dokazati.

18.10. Dokazati da za sve realne vrijednosti $x > 0$, $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$ i $0 < c \neq 1$ vrijedi jednakost

$$\frac{\log_a x}{\log_c x} = \frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x},$$

ako je $b = \sqrt{ac}$.

18.11. Data je jednačina

$$\log_a[x^3 f(x) - f(x)] - \log_a(x^2 - 1) + \log_a(x + 1) = x + \log_a(x^2 + x + 1),$$

$0 < a \neq 1$.

a) Odrediti funkciju f definisanu tom jednačinom;

b) odrediti domenu i skup svih vrijednosti funkcije f za $a = 2$ i predstaviti tu funkciju grafički.

18.12.* Odrediti najveću vrijednost funkcije f date formulom

$$f(x) = \log_2^2 x\left(\log_2^2 x + 3\log_2 \frac{8}{x^2}\right)$$

u intervalu $(1, 8)$.

18.13. Odrediti vrijednost funkcije $f(x) = \log_5(10 - x) - 1$
u tački $x = 10^{1 - \log 5} + 10^{2 - \log 20} - 10^{3 - \log 500}$,
a zatim nacrtati grafik date funkcije.

18.14. Data je funkcija f formulom

$$f(x) = 8^{\log_x 5}.$$

a) Naći vrijednost $f(2)$;

b) odrediti domenu date funkcije;

c) nacrtati grafik i odrediti skup vrijednosti te funkcije.

18.15. Ako je $\log x = \frac{2}{3}$ i $\log y = \frac{1}{3}$, ispitati da li broj $\log(x + y)$ pripada intervalu

$$\left(\frac{2}{9}; 1\right).$$

18.16.* Dokazati da je nejednakost

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{c+a} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$$

tačna, ako je $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ ili $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$.

18.2. LOGARITAMSKE JEDNAČINE

Logaritamska jednačina

(1) $$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

ekvivalentna je sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) = g(x).$$

Zajednička rješenja prve dvije nejednačine sistema određuju domenu jednačine (1), a jednačina $f(x) = g(x)$ slijedi na osnovu formule 18.2.

Ako umjesto jednačine (1), imamo jednačinu

(2) $$\log_a f(x) = k,$$

možemo je svesti na oblik (1) stavljajući $\log_a a^k$ umjesto k (vidi prvu formulu (18.1′)). Jednostavnije je, međutim, jednačinu (2) odmah svesti na ekvivalentnu jednačinu

$$f(x) = a^k,$$

na osnovu definicije logaritma (vidi formulu (18.1)).

Ako data logaritamska jednačina J nema oblik (1) ili (2), svodimo je na taj oblik. Pri tome primjenjujemo, najčešće, sljedeća pravila za logaritme:

$$\left.\begin{aligned} &\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b, \\ &\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b, \\ &\log_c a^p = p \cdot \log_c a, \end{aligned}\right\} \tag{18.6}$$

pri čemu je $a > 0$, $b > 0$, $0 < c \neq 1$, $p \in R$.

Ova pravila treba primjenjivati pažljivo, jer može doći do promjene definicionog područja. Tako, na primjer, u trećoj jednakosti (18.6) izraz $\log_c a^p$ za $a < 0$ i p paran ne smijemo zamijeniti sa $p \cdot \log_c a$, već sa $p \cdot \log_c |a|$.

Ukoliko svi logaritmi u datoj jednačini J nemaju istu bazu, prvo ih svedemo na istu bazu. Prelaz sa baze b na bazu a vršimo po formuli:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad 0 < a \neq 1, \quad 0 < b \neq 1 \tag{18.7}$$

Primjer 18.1. Treba riješiti logaritamsku jednačinu

(1) $$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$$

Rješenje. Definiciono područje čine sve vrijednosti $x \in R$ za koje su svi numerusi pozitivni, a to je interval

$$(-6, 4).$$

Na osnovu trećeg pravila u formulama (18.6) jednačine (1) ekvivalentna je jednačini

$$3 \cdot \log_{\frac{1}{4}}|x+2| - 3 = 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + 3 \cdot \log_{\frac{1}{4}}(x+6).$$

Kada ovu jednačinu podijelimo brojem 3 i kada umjesto -1 stavimo $\log_{\frac{1}{4}} 4$, dobijemo:

$$\log_{\frac{1}{4}}|x+2| + \log_{\frac{1}{4}} 4 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x) + \log_{\frac{1}{4}}(x+6),$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(|x+2| \cdot 4) = \log_{\frac{1}{4}}[(4-x) \cdot (x+6)],$$

(2) $$4|x+2| = (4-x)(x+6).$$

1^0 Ako je $x \geqslant -2$, jednačina (2) prima oblik

$$x^2 + 6x - 16 = 0,$$

odakle slijedi da je

$$x_1 = -8,\ x_2 = 2.$$

Pošto vrijednost $x = -8$ ne zadovoljava uslov $x \geqslant -2$, ona otpada; vrijednost $x = 2$ zadovoljava taj uslov, a pripada i definicionom području $(-6, 4)$. Uvrštavanjem u datu jednačinu uvjeravamo se da je $x = 2$ stvarno njeno rješenje.

2^0 Za vrijednosti $x < -2$ jednačina (2) je ekvivalentna jednačini

$$x^2 - 2x - 32 = 0$$

čija su rješenja

$$x_3 = 1 - \sqrt{33},\quad x_4 = 1 + \sqrt{33}.$$

Vrijednost x_4 ne zadovoljava uslov $x < -2$, pa otpada, a x_3 je rješenje.

Prema tome, data jednačina ima rješenja

$$x = 2,\quad x = 1 - \sqrt{33}.$$

Primjer 18.2. Riješimo jednačinu

$$\frac{1}{2}\log_a(1+x) + 3\log_{a^2}(1-x) = \log_{a^4}(1-x^2)^2 + 2.$$

Rješenje. Podrazumijevamo da je $0 < a \neq 1$. Domena jednačine je

$$D = (-1, 1).$$

Svedimo sve logaritme na bazu a (primjenjujući formulu (18.7)):

$$\log_{a^4}(1-x^2)^2 = \frac{\log_a(1-x^2)^2}{\log_a a^4} = \frac{2\log_a(1-x^2)}{4} \text{ (jer je } 1-x^2 > 0) =$$

$$= \frac{1}{2}\log_a(1-x^2), \text{ i slično za } \log_{a^2}(1-x). \text{ Zato imamo:}$$

$$\frac{1}{2}\log_a(1+x) + 3\cdot\frac{1}{2}\log_a(1-x) = \frac{1}{2}\log_a(1-x^2) + 2,$$

$$\log_a(1+x) + \log_a(1-x)^3 - \log_a(1-x^2) = 4,$$

$$\log_a\frac{(1+x)(1-x)^3}{1-x^2} = 4,$$

$$\log_a(1-x)^2 = 4,$$

$$(1-x)^2 = a^4,$$

$$1 - x = a^2, \text{ (jer je } 1-x > 0)$$

$$x = 1 - a^2.$$

Ispitajmo da li vrijednost $x = 1 - a^2$ pripada domeni $(-1, 1)$:

$$-1 < 1 - a^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < -a^2 \wedge -a^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 2 \wedge a^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < \sqrt{2}.$$

Znači, ako je $0 < a < \sqrt{2}$ i $a \neq 1$, vrijednost $x = 1 - a^2$ pripada domeni $(-1, 1)$ date jednačine. Probom se uvjeravamo da je to zaista rješenje jednačine.

Prema tome, za $0 < a < \sqrt{2}$ i $a \neq 1$ rješenje jednačine je

$$x = 1 - a^2,$$

a za $a \geqslant \sqrt{2}$ jednačina nema rješenja.

Zadaci (18.17—18.46)

Riješiti sljedeće jednačine:

18.17. $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1.$

18.18. $\log x^2 + \log^2 |x| = 3.$

18.19. $\log_a \frac{4 - x}{2x + 3} = \log_a a^2,\ 0 < a \neq 1.$

18.20. $3\log^2(x - 1) - 10\log(x - 1) + 3 = 0.$

18.21. $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 + 1 = 0.$

18.22. $\log^2(20x + 10) + \log\sqrt{8x + 4} = \frac{5}{2} + \log 2.$

18.23. $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{2\log_2 x - 2} = 4.$

18.24. $\frac{\log|x^4 + 2x^3 + 2x - 1|}{\log|x^2 + x - 1|} = 2.$

18.25. $|1 + \log_{\frac{1}{2}} x| = 3 + |2 - \log_{\frac{1}{2}} x|.$

18.26. $\log_x 3 - \log_x 2 = \frac{1}{2}.$

18.27. $\log_2^2(x - 1)^2 - \log_{\frac{2}{2}}(x - 1) = 5.$

18.28. $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_5 x} = 1.$

18.29. $2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2 2\sqrt{2}x = 1.$

18.30.* $\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x = \log_2 x \cdot \log_3 x + \log_2 x \cdot \log_5 x + \log_3 x \cdot \log_5 x.$

18.31. $\log_a x + |a + \log_a x| \cdot \log_{\sqrt{x}} a = a\log_x a.$

18.32. $\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0.$

18.33.* $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a, \quad 0 < a \neq 1.$

18.34. $[1 - \log(\log k)] \cdot \log_x 10 + 1 = \log_x \frac{10}{2 - x}$.

18.35.* $1 + \log_x \frac{4 - x}{10} = [\log(\log n) - 1] \cdot \log_x 10, \quad n \in N.$

18.36. $2(\log_b x \cdot \log_a 3 + \log_a x \cdot \log_b a) = \log_a x \cdot \log_b x,$
$0 < a \neq 1, \quad 0 < b \neq 1.$

18.37. $\log x + \log x \log(x + 2) = \log^2 x + \log(x + 2).$

18.38. $1 + 2\log_x 2 \cdot \log_4(10 - x) = \frac{2}{\log_4 x}$.

18.39.* a) $\log x = 1 - x$; b) $x \log_3 x = 18$. (Uputa: pomoći se grafičkom predstavom.)

18.40.* $\log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x = 6 - 2x.$

18.41. a) $x^{\log x} = 100\,x$; b) $x^{\frac{1}{4}(\log x + 7)} = 10^{\log x + 1}$.

18.42. $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12.$

18.43. $x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2 - x)} = a^{\log_a 2^4}, \quad a > 0.$

18.44.* Naći sve realne vrijednosti parametra k za koje jednačina

$$\log kx = 2\log(x + 1)$$

ima jedno i samo jedno rješenje.

18.45. Naći sve vrijednosti parametra α za koje jednačina

$$\cos\alpha \cdot \log_a^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \log_a x + \frac{1 - 4\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha} = 0, \quad 0 < a < 1$$

ima sva rješenja u intervalu (0,1).

18.46.* Odrediti broj rješenja jednačine

$$\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x$$

i intervale u kojima se ta rješenja nalaze.

18.3. SISTEMI JEDNAČINA OD KOJIH JE BAR JEDNA LOGARITAMSKA

Zadaci (18.47.—18.59)

Riješiti sljedeće sisteme jednačina:

18.47. $\log_x y - 4\log_y x = 3 \wedge xy = 2.$

18.48. $\log x + \log y = \frac{5}{4} \wedge \log_x 10 + \log_y 10 = 5.$

18.49. $|\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3 \wedge xy = 3.$

18.50. $xy = a^2 \wedge \log^2 x + \log^2 y = \frac{5}{2}\log^2 a^2.$

18.51. $\log_2 \frac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2 \wedge \log_8 x \cdot \log_2 (y+1)^2 = \frac{4}{3}.$

18.52. $\log_{a^2} x \cdot \left(\frac{1}{\log_x 2} + \log_2 y\right) = \log_2 x,$

$\log_2 x \cdot \log_3 (x+y) = 3\log_3 x.$

18.53. $\log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1,$

$xy^2 = 4.$

18.54. $\log_2 x \cdot \log_x (x-3y) = 2 \wedge x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}}.$

18.55. a) $\log x + y = 1 \wedge x^y = \frac{1}{100};$

b) $(\sqrt[3]{x})^{\log y} = 2 \wedge y\sqrt[3]{x} = 20.$

18.56. $|x|^{\log|y|} = 4 \wedge |xy| = 40.$

18.57. $a^x b^y = ab \wedge 2\log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b.$

18.58.* $20\, x^{\log_3 y} + 7\, y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3} \wedge xy = 9\sqrt[3]{3}.$

18.59. $\log_2 x + \log_3 y + \log_5 z = 6,$

$\log_4 x - 2\log_9 y + \log_5 z = 2,$

$2\log_{16} x + 3\log_{27} y + 3\log_{125} z = 4.$

18.4. LOGARITAMSKE NEJEDNAČINE

Logaritamske nejednačine svodimo na oblik

(1) $\log_a f(x) < \log_a g(x),$

ili na oblik

(2) $\log_a f(x) < k.$

Na osnovu formula (18.4) i (18.5) vrijedi sljedeće:

ako je $a > 1$ nejednačina (1) ekvivalentna je sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) < g(x),$$

a ako je $0 < a < 1$, ona je ekvivalentna sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) > g(x).$$

Nejednačina (2) se, uz uslov $f(x) > 0$, svodi na nejednačinu

$$f(x) < a^k \quad \text{za } a > 1,$$

a na nejednačinu

$$f(x) > a^k \text{ za } 0 < a < 1.$$

Primjer 18.3. Riješimo logaritamsku nejednačinu

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}} \frac{24-2x-x^2}{14} \geqslant 1.$$

Rješenje. Data nejednačina definisana je za sve vrijednosti $x \in R$ za koje su istovremeno ispunjeni uslovi:

$$\frac{24-2x-x^2}{14} > 0 \text{ i } 0 < \frac{25-x^2}{16} \neq 1.$$

Prvi uslov ispunjen je ako je

(1) $$-6 < x < 4.$$

Pošto je kod logaritamske nejednačine važno da li je baza logaritma manja ili veća od 1, drugi uslov razdvojimo na dva slučaja.

1^0 Uslov $0 < \frac{25-x^2}{16} < 1$ ekvivalentan je uslovu $3 < |x| < 5$, tj.

(2) $$x \in (-5, -3) \cup (3, 5).$$

2^0 Uslov $\frac{25-x^2}{16} > 1$ ekvivalentan je uslovu $|x| < 3$, tj.

(3) $$x \in (-3, 3).$$

Iz uslova (1) i (2) dobijemo skup

(4) $$(-5, -3) \cup (3, 4),$$

a iz uslova (1) i (3) skup

(5) $$(-3, 3).$$

Prema tome, data nejednačina definisana je u intervalima (4) i (5).

U intervalima (4) data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\frac{24-2x-x^2}{14} \leqslant \frac{25-x^2}{16},$$

čija rješenja čine intervale

$$(-\infty, -17] \text{ i } [1, +\infty).$$

Odatle i iz (4) dobijemo podskup skupa rješenja

$$\mathscr{R}_1 = (3, 4).$$

U intervalu (5) data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\frac{24-2x-x^2}{14} \geqslant \frac{25-x^2}{16},$$

čija rješenja čine interval

$$[-17, 1].$$

Odatle i iz (5) dobijemo drugi podskup skupa rješenja

$$\mathscr{R}_2 = (-3, 1].$$

Skup rješenja date nejednačine je

$$\mathscr{R} = (-3, 1] \cup (3, 4).$$

Zadaci (18.60—18.77)

Riješiti sljedeće nejednačine:

18.60. $\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 0.$

18.61. $\log_{2x+3} x^2 < 1.$

18.62. $\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1}\ \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1}.$

18.63. $2\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 \leq \log_{9\sqrt{x}} 3.$

18.64. $\log_{1-x^2}(x+1)^4 \leqslant \log_{\sqrt{2x-1}} |1-2x|.$

18.65. $\log_{\left|x-\frac{1}{2}\right|}(2x+3-x^2) \leqslant \log_{|1-2x|}(2x-1).$

18.66. $\log_a^4 x - \log^2_{\frac{1}{a}} \frac{x^5}{a^2} - 20\log_a x + 148 < 0.$

18.67. $\frac{1}{2}\log_a(1+x) + 3\log_{a^2}(1-x) > \log_{a^4}(1-x^2)^2 + 2.$

18.68. $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} < -\sqrt{6}\cdot\log_x \sqrt{5}.$

18.69. $\log(4^{-1}\cdot 2^{\sqrt{x}} - 1)^{\sqrt{5}} - 1 < \log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x-2}}+2}\right) - 2\log 2.$

18.70. $\log_2(2^x - 1)\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2.$

18.71.* $_x\log_a^2 x + \log_a x^3 + 3 < \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$

18.72. $1 + \log_{0,5}\dfrac{|x+1+2i|-2}{\sqrt{2}-1} > 0,$ gdje je i imaginarna jedinica.

18.73.* $\log_{\sqrt{a}}(\sqrt{x+a} - x + \sqrt{a}) \geqslant 1.$

18.74. Odrediti istinitosni skup konjunkcije

$$\log_{0,75}\sin x \geqslant \log_{\frac{9}{16}} 0{,}75 \wedge |x| < 3.$$

18.75. Za koje vrijednosti α i $x \in [1, +\infty)$ je istinita formula

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_x \frac{1}{2} + 2\cos\alpha \geqslant 0?$$

18.76. Ako je $z = x + yi$, odrediti skup svih tačaka ravni za čije koordinate x i y vrijedi nejednakost

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{|z|^2 - |z| + 1}{2 + |z|} < 2.$$

18.77. Ako je $z = x + yi$ kompleksan broj, odrediti dio ravni u koordinatnom sistemu koji prekrivaju sve tačke $T(x, y)$ za koje je

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{|z-2|+2}{4|z-2|-2} < 1.$$

19. POLINOMI. RACIONALNA RJEŠENJA ALGEBARSKIH JEDNAČINA. RACIONALNE FUNKCIJE

19.1. POLINOMI

Definicija 19.1. Pod polinomom kompleksne varijable x podrazumijevamo izraz

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdje su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni ili kompleksni brojevi. Ako je $a_n \neq 0$, kažemo da je $P(x)$ polinom n-tog stepena. Stepen polinoma kome su svi koeficijenti jednaki 0 se (obično) ne definiše.

Za polinom $P(x)$ kažemo da je identički jednak 0 ako važi:

$$(\forall\, x \in R)\ P(x) = 0.$$

Teorema 19.1. Da bi polinom bio identički jednak 0, potrebno je i dovoljno da su mu svi koeficijenti jednaki 0.

Za dva polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ kažemo da su identički jednaki i pišemo $P(x) = Q(x)$ ako imaju jednake vrijednosti za sve vrijednosti varijable x.

Teorema 19.2. Da bi dva polinoma bila identički jednaka, potrebno je i dovoljno da su im koeficijenti članova istog stepena jednaki.

Za polinom P kažemo da je djeljiv polinomom Q, da je Q djelitelj od P, ako postoji polinom Q_1 tako da je $P(x) = Q(x) \cdot Q_1(x)$. Polinom koji je djelitelj dva ili više polinoma zove se njihovim zajedničkim djeliteljem.

Teorema 19.3. Za dva proizvoljna polinoma $P(x)$ i $Q(x) \neq 0$ čiji koeficijenti pripadaju nekom brojevnom polju P postoje jednoznačno polinomi $Q_1(x)$ i $R(x)$ sa koeficijentima iz polja P, tako da vrijedi jednakost

$$P(x) = Q(x) \cdot Q_1(x) + R(x), \tag{19.1}$$

pri čemu je stepen ostatka $R(x)$ manji od stepena polinoma $Q(x)$ ili je $R(x) = 0$.

Svaka konstanta $C \neq 0$ je zajednički djelitelj svaka dva polinoma. Ako dva polinoma nemaju drugih zajedničkih djelitelja, onda kažemo da su oni uzajamno (relativno) prosti.

Ako je polinom P djeljiv polinomima Q_1 i Q_2, a Q_1 i Q_2 su relativno prosti, onda je polinom P djeljiv i njihovim proizvodom $Q_1 Q_2$.

Primjer 19.1. Pri dijeljenju polinoma $P(x) = 4x^4 - 3x^3 + x + 6$ sa $Q(x) = x^2 - 2x + 5$ dobijemo nepotpuni količnik $Q_1(x) = 4x^2 + 5x + 10$ i ostatak $R(x) = -4x - 44$. U ovom slučaju jednakost (19.1) izgleda ovako:

$$4x^4 - 3x^3 + x + 6 = (x^2 - 2x + 5)(4x^2 + 5x + 10) + (-4x - 44).$$

Ako je u teoremi 19.3. ostatak $R(x) = 0$ (identički), tada je polinom $P(x)$ djeljiv sa $Q(x)$, i obrnuto. Ako je djelitelj

$$Q(x) = x - a,$$

tj. polinom prvog stepena, tada je ostatak R konstanta (jer je ostatak 0 ili mu je stepen jednak 0, pošto je taj stepen manji od stepena polinoma $Q(x)$). Jednakost 19.1. tada ima oblik

$$P(x) = (x - a)Q_1(x) + R. \tag{19.2}$$

Stavimo li u ovu jednakost da je $x = a$, dobijemo da je

$$P(a) = R.$$

Tako imamo sljedeću teoremu.

Teorema 19.4. (Bezuova teorema)[1]. Ostatak R pri dijeljenju polinoma $P(x)$ binomom $x - a$ jednak je vrijednosti $P(a)$.

Količnik

$$Q_1(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$$

pri dijeljenju polinoma

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

binomom $x - a$, čiji je stepen $n - 1$, kao i ostatak R, možemo naći običnim dijeljenjem. Koeficijente količnika $Q_1(x)$ možemo, međutim, odrediti i pomoću formule

$$b_i = a \cdot b_{i+1} + a_{i+1},\ i = 0,1,\ldots,n-1 \tag{19.3}$$

Do ove se formule dolazi na osnovu teoreme 19.2. o identičkoj jednakosti polinoma na lijevoj i desnoj strani jednakosti (19.2). Koeficijente polinoma $Q_1(x)$ koje izračunavamo po formuli (19.3) ispisujemo pregledno u sljedećoj Hornerovoj[2] šemi:

	a_n	a_{n-1}	...	a_{i+1}	...	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = ab_{n-1} + a_{n-1}$	...	$b_i = ab_{i+1} + a_{i+1}$	...	$R = ab_0 + a_0$

U toj šemi prvi član b_{n-1} u drugoj vrsti jednak je članu iznad njega u prvoj vrsti, a svaki dalji član druge vrste dobije se tako da se prethodno član te vrste pomnoži sa a i zatim se proizvodu doda član iznad iz prve vrste.

Primjer 19.2. Odredimo Hornerovim postupkom količnik $Q_1(x)$ i ostatak pri dijeljenju polinoma

$$P(x) = 2x^5 - 6x^4 - 17x^3 + x - 4$$

[1] E. Bezout (1730—1783) — francuski matematičar.
[2] W. Horner (1786—1837) — engleski matematičar.

binomom

$$Q(x) = x - 5.$$

Rješenje. Jasno je da je traženi količnik $Q_1(x)$ četvrtog stepena, pa imamo ovu Hornerovu šemu:

	$a_5 = 2$	$a_4 = -6$	$a_3 = -17$	$a_2 = 0$	$a_1 = 1$	$a_0 = -4$
$a = 5$	$b_4 = 2$	$b_3 = 4$	$b_2 = 3$	$b_1 = 15$	$b_0 = 76$	$R = 376$

Napominjemo da se ostatak R može naći i na osnovu teoreme 19.4:

$$R = P(5) = 2 \cdot 5^5 - 6 \cdot 5^4 - 17 \cdot 5^3 + 5 - 4 = 376.$$

Traženi količnik je

$$Q_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 15x + 76,$$

a ostatak je $R = 376$.

Ako je $x = a$ nula polinoma $P(x)$, tada je, prema Bezuovoj teoremi, ostatak $R = 0$ (jer je $R = P(a) = 0$), a to znači da je polinom $P(x)$ djeljiv binomom $x - a$. Vrijedi i obrnuto, pa imamo sljedeću teoremu.

Teorema 19.5. Polinom $P(x)$ djeljiv je sa $x - a$ ako i samo ako je a nula polinoma $P(x)$.

Ova teorema vrijedi i kada je nula a imaginarna.

Primjer 19.3. Ispitati da li je polinom

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$$

djeljiv polinomom

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Rješenje. Polinom $Q(x)$ možemo rastaviti na sljedeći način:

$$Q(x) = x^2(x - 2) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 1),$$

$$Q(x) = (x - 2)(x - i)(x + i).$$

Ispitajmo sada da li su brojevi 2, i, $-i$ nule polinoma $P(x)$:

$$P(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0.$$

Pokazuje se da je, također, $P(i) = 0$ i $P(-i) = 0$. Pošto su brojevi 2, i, $-i$ nule polinoma $P(x)$, taj je polinom, prema teoremi 19.5, djeljiv binomima $x - 2$, $x - i$, $x + i$. Kako su ti binomi međusobno relativno prosti, polinom $P(x)$ je djeljiv i njihovim proizvodom $Q(x)$.

Napomena 19.1. a) Vrijedi takozvani osnovni stav algebre: Svaki polinom $P(x)$ stepena $n \geqslant 1$ ima u skupu C kompleksnih brojeva bar jednu nulu.

b) Svaki polinom $P(x)$ stepena $n \geqslant 1$ ima u kompleksnom području n nula, i on se u tome području može, na jedinstven način, rastaviti u proizvod linearnih faktora $x - x_i$:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n),$$

gdje su x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ nule polinoma. Ovaj prikaz zovemo rastav ili *faktorizacija* polinoma u skupu C.

c) Svaki polinom $P(x)$ stepena $n \geqslant 1$ ima u realnom području faktorizaciju $P(x) = a_n(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_r)\cdot(x^2 + p_1x + q_1)\cdot\ldots\cdot(x^2 + p_sx + q_s)$, gdje su $x_1, \ldots, x_r$ realne nule polinoma $P(x)$, a kvadratni faktori imaju oblik $x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)\cdot(x - \overline{z}_j)$, gdje su z_j, $\overline{z}_j (j = 1, 2, \ldots, s)$ eventualne imaginarne nule polinoma $P(x)$.

Zadaci (19.1—19.34)

19.1. Dat je polinom $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24$. Pokazati da je $P(x) = |P(x)|$.

19.2. Treba odrediti koeficijente a i b tako da polinom

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$$

bude potpuni kvadrat nekog polinoma.

19.3. Odrediti cijele brojeve, a, b i c tako da vrijedi jednakost polinoma $(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c)$.

19.4. Data su preslikavanja:

$F: R \mapsto R$, $F(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + Ax + B$,
$f: R \mapsto R$, $f(x) = x^2 + px + q$.

a) Odrediti A i B tako da vrijedi jednakost

$$F(x) = f[f(x)], \quad (\forall\, x \in R).$$

b) Riješiti (za nađene vrijednosti A, B) nejednačinu:

$$F(x) < 0.$$

19.5. Odrediti najveći zajednički djelilac (vidi rješenje ovog zadatka) polinoma

a) $P(z) = z^4 + z^3 - 2z - 2$, $\quad Q(z) = 2z^3 + z^2 + 1$,

b) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$, $\quad Q(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$.

19.6. Ako su $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ nule polinoma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0, \quad (a_n \neq 0),$$

dokazati da vrijede sljedeće Viétove formule:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 x_3 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

$$x_1 x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

19.7. Ako su x_1, x_2, x_3 nule polinoma

$$x^3 + px + q,$$

izraziti $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ pomoću p i q.

19.8. Neka su nule polinoma

$$f(x) = x^3 + px + q$$

realne, kao i koeficijenti p i q i $q \neq 0$. Dokazati da je $p < 0$.

19.9. Odrediti pomoću Hornerovog postupka količnik $q(x)$ i ostatak $r(x)$ pri dijeljenju polinoma $2x^4 - x^3 + 2x^2 + 6x - 1$ binomom $x - 2$.

19.10. Naći ostatak pri dijeljenju polinoma

$$f(x) = x^{99} + x^3 + 10x + 5 \text{ sa } g(x) = x^2 + 1.$$

19.11. Jednačina $Ax^2 + 17xy + Cy^2 - 2x + Ey - 2 = 0$ predstavlja dvije prave, od kojih jedna ima jednačinu $x + 5y - 1 = 0$. Kako glasi jednačina druge prave i koje vrijednosti imaju koeficijenti A, C i E?

19.12. Odrediti sve (kompleksne) vrijednosti parametra a za koje jednačina

$$z^5 - 5z + a = 0$$

ima dva jednaka rješenja.

19.13. Naći polinom četvrtog stepena čiji su jednostruki (prosti) korijeni 5 i -2, a dvostruki 3.

19.14. Predstaviti polinom $z^5 - 2z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 2z + 5$ u obliku polinoma po $z - 1$.

19.15. Odrediti a i b tako da polinom $z^4 + az^3 + bz^2 - 8z + 4$ ima dvije dvostruke nule, tj. nule drugog reda. Zatim odrediti te nule.

19.16. Provjeriti da polinom $P(z) = z^5 - 8z^4 + 22z^3 - 26z^2 + 21z - 18$ ima nule 2 i 3 i na osnovu toga odrediti faktorizaciju: a) u skupu R, b) u skupu C.

19.17. Koristeći Hornerovu šemu, izračunati $P(z_0)$ za

$$P(z) = z^5 + (1 + 2i)z^4 - (1 + 3i)z^2 + 7, \quad z_0 = -2 - i.$$

19.18. Odrediti koeficijente a, b i c tako da polinom

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

bude djeljiv binomima $x - 1$ i $x + 2$ a podijeljen sa $x - 4$ daje ostatak 18.

19.19. Dokazati da je polinom $f(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

19.20. Treba odrediti parametre a i b tako da bi polinom

$$f(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$$

bio djeljiv polinomom $g(x) = x^2 - x + b$.

19.21. Pri dijeljenju polinoma $f(x)$ sa $x - 2$ dobije se ostatak 5, a pri dijeljenju sa $x - 3$ dobije se ostatak 7. Koliki je ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ sa $(x - 2)(x - 3)$?

19.22.* Pri dijeljenju polinoma $f(x)$ sa $x^2 + x + 1$ dobije se ostatak $1 - x$, a pri dijeljenju sa $x^2 - x + 1$ dobije se ostatak $3x + 5$. Naći ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ sa $x^4 + x^2 + 1$.

19.23. Za koje realne vrijednosti koeficijenata p i q je binom $x^4 + 1$ djeljiv sa $x^2 + px + q$?

19.24. Odrediti a i b tako da trinom $x^3 + ax + 1$ bude djeljiv binomom $x - b$ i da količnik $q(x)$ bude pozitivan za sve vrijednosti $x \in R$.

19.25. Za koje vrijednosti parametara a i n, $n \in N$, $n \neq 1$, je polinom

$$f(x) = x^n - ax^{n-1} + ax - 1$$

djeljiv sa $(x - 1)^2$?

19.26. Ispitati djeljivost polinoma $(x + 1)^{4n} + x^{2n} + 4^n + 1$ sa $x^2 + 1$ za prirodne brojeve n.

19.27. Pokazati da je polinom

$$P_n = x^{n+1}\cos(n - 1)t - x^n \cos nt - x\cos t + 1$$

djeljiv polinomom

$$A = x^2 - 2x\cos t + 1$$

i naći količnik Q.

19.28.* Naći sve prirodne brojeve n za koje je polinom

$$(x + 1)^n - x^n - 1$$

djeljiv sa $x^2 + x + 1$.

19.29. Jedan korijen jednačine $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$ je $1 + i$. Naći ostale korijene.

19.30. Dokazati da je u odnosu na sabiranje polinoma i množenje polinoma kao funkcija skup $\mathscr{P}$ svih polinoma (definisanih na R ili na C) prsten s jedinicom.

19.31. Odrediti koeficijent uz x^8 u razvoju polinoma

$$(1 + x^2 - x^3)^9.$$

19.32.* Izračunati broj koeficijenata različitih od nule u razvijenom obliku polinoma

$$(1 + x^2 + x^5)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100}.$$

19.33.* Za polinome f, g, h vrijedi

$$(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h).$$

Naći tri polinoma f, g, h takva da je

$$h \circ (f + g) \neq (h \circ f) + (h \circ g),$$

tj. da lijevi zakon distribucije ne vrijedi (za kompoziciju $\circ$ polinoma), a desni vrijedi.

19.34.* Polinom $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ jednak je $(x^{1948} + x^{1985} + 2)^{2050}$. Čemu je jednak izraz

$$a_0 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} + a_3 - \frac{a_4}{2} - \frac{a_5}{2} + a_6 - \ldots ?$$

19.2. RACIONALNA RJEŠENJA ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Ako polinom n-tog stepena izjednačimo sa 0 dobijemo *algebarsku* jednačinu n-tog stepena:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0). \tag{19.4}$$

Neka su koeficijenti ove jednačine racionalni brojevi. Možemo, čak, uzeti da su oni cijeli. Ako su oni razlomci, možemo jednačinu pomnožiti najmanjim zajedničkim sadržaocem svih nazivnika, i dobiti cijele koeficijente.

Ako jednačina (19.4) ima racionalnih rješenja, tada za njih vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 19.6. Ako je racionalan broj $\frac{p}{q}$, gdje su p i q relativno prosti i $pq \neq 0$, rješenja jednačine (19.4), tada je koeficijent a_n djeljiv sa q, a koeficijent a_0 djeljiv sa p.

Posljedica 1. Svako cjelobrojno rješenje jednačine (19.4) je djelilac koeficijenta a_0 (tada je, naime, $q = \pm 1$, pa $q | a_n$).

Posljedica 2. Ako je $a_n = 1$, tada je svako racionalno rješenje jednačine (19.4) cio broj (tada je, opet, $q = \pm 1$, jer $q | a_n$).

Napomena 19.2. Uslovi da je $q | a_n$ i $p | a_0$ su samo potrebni, ali ne i dovoljni uslovi da bi broj $\frac{p}{q}$ bio rješenje jednačine (19.4) sa cijelim koeficijentima. Ne vrijedi, dakle, teorema obrnuta teoremi 19.6. Ako su ispunjeni uslovi $q | a_n$ i $p | a_0$, tek treba provjeriti da li je broj p/q rješenje.

Primjer 19.4. Riješiti jednačinu

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Rješenje. Ovdje je $a_n = a_4 = 1$, pa ako postoje racionalna rješenja, ona su cijeli brojevi (vidi posljedicu 2. teoreme 19.6). Ta su rješenja, prema posljedici 1, faktori koeficijenta $a_0 = 15$. Znači, cijela rješenja, ako postoje, treba tražiti između brojeva

$$\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15.$$

Pošto je $P(3) = 0$ i $P(5) = 0$, brojevi 3 i 5 su cijela rješenja. Prema teoremi 19.5. polinom $P(x)$ djeljiv je sa $x - 3$ i sa $x - 5$, pa je djeljiv i sa $(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$. Količnik toga dijeljenja je $x^2 + 1$, pa imamo:

$$P(x) = (x - 3)(x - 5)(x - i)(x + i) = 0.$$

Odavde zaključujemo da su sva rješenja date jednačine:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 5,\ x_3 = i,\ x_4 = -i.$$

Napomena 19.3. Ako je koeficijent $a_n \neq 1$, umjesto da odmah, pri traženju racionalnih rješenja, koristimo teoremu 19.6, možemo u datu jednačinu uvesti novu nepoznatu y smjenom $x = \frac{y}{a_n}$ i pomnožiti dobijenu jednačinu sa a_n^{n-1}. Time se dobije jednačina sa nepoznatom y kod koje je koeficijent najstarijeg člana jednak 1. Zato se na nju mogu primijeniti posljedice 1. i 2. teoreme 19.6.

Napomena 19.4. Ako je neko racionalno rješenje $\frac{p}{q}$ jednačine višestruko, to se ne može otkriti primjenom teoreme 19.6. na polinom $P(x)$, već na neki drugi način. Ako se polinom $P(x)$ podijeli sa $x - \frac{p}{q}$, tada se teorema 19.6 može primijeniti na količnik $Q_1(x)$, ili treba rastavljati $Q_1(x)$ itd.

Zadaci (19.35—19.47)

19.35. Ispitati ima li jednačina

$$x^4 - x^3 + x + 2 = 0$$

ijedno rješenje u skupu Z cijelih brojeva.

19.36. Naći cjelobrojna rješenja jednačine

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0.$$

19.37. Odrediti vrijednosti $p \in Z$ tako da jednačina

$$x^3 - px + 1 = 0$$

ima racionalnih rješenja.

19.38. Riješiti nejednačinu

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0.$$

19.39. Naći sve nule polinoma

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12.$$

19.40. Ako su vrijednosti $x_1 = 1$ i $x_2 = -3$ nule polinoma

$$P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + ax + b,$$

riješiti nejednačinu $P(x) > 0$.

Naći sva realna rješenja jednačina:

19.41. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.

19.42. $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$.

19.43. Naći racionalna rješenja jednačine

$$30z^5 - 9z^4 - 10z^3 + 3z^2 - 40z + 12 = 0.$$

19.44. Odrediti sve nule polinoma

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 11x^2 + 2x + 2.$$

19.45. Riješiti jednačinu:

$$x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - 6x = 0.$$

19.46. Ako je n prosti (prirodni) broj, dokazati da jednačina

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + n = 0$$

nema racionalnih rješenja.

19.47. Ako je broj $1 + \sqrt{2}$ rješenje jednačine

$$x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 = 0,$$

i ako su a i b racionalni brojevi, naći ostala rješenja jednačine.

19.3. RACIONALNE FUNKCIJE

Definicija 19.2. Funkcija iz R u R oblika

$$x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (Q \neq 0),$$

gdje su P i Q proizvoljni realni polinomi, označava se sa $\frac{P}{Q}$ i zove *racionalna funkcija*[1] (razlomak, odnosno količnik polinoma).

Definicija 19.3. Za racionalnu funkciju $\frac{P}{Q} \neq 0$ kažemo da je *nesvodljiva* (u kanonskom ili skraćenom obliku) ako su polinomi P, Q $(\neq 0)$ relativno prosti, tj. ako nemaju zajednički faktor $x \to r(x) \neq \text{const}$ (odnosno ako je (najveća zajednička mjera) $M(P, Q) = 1$).

Definicija 19.4. Ako je stepen polinoma[2] P manji od stepena polinoma Q, onda se $\frac{P}{Q}$ naziva *prava racionalna funkcija*. Inače, racionalna funkcija je *neprava*.

---

[1] Analogno, uzimajući da su P i Q kompleksni polinomi, definiše se kompleksna racionalna funkcija iz C u C.

[2] Tu podrazumijevamo i specijalan slučaj $P = 0$.

Definicija 19.5. Pod *prostim* ili *parcijalnim razlomkom* podrazumijeva se funkcija oblika

$$x \mapsto \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

gdje su A i a konstante. Osim toga, u polju realnih brojeva pod parcijalnim razlomkom smatra se i funkcija

$$x \mapsto \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} \quad (k = 1, 2, \ldots : p^2 - 4q < 0),$$

gdje su M, N, p, q realne konstante.

Teorema 19.7. Svaka nesvodljiva prava racionalna funkcija može se na jedinstven način prikazati kao zbir konačno mnogo parcijalnih razlomaka[1].

Ako je

$$Q(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_j)^{n_j} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}, \tag{19.5}$$

gdje su $a_1, \ldots, a_j$ različiti realni korijeni (višestrukosti $n_1, \ldots, n_j$ respektivno) realnog polinoma Q, a $x^2 + p_1 x + q_1, \ldots, x^2 + p_k x + q_k$ realni trinomi sa imaginarnim nulama (višestrukosti $m_1, \ldots, m_k$ respektivno), onda postoje (realne) konstante $A_{11}, \ldots, A_{1n_1}, \ldots, A_{j1}, \ldots, A_{jn_j}$ M_{11}, $N_{11}, \ldots, M_{1m_1}, \ldots, M_{k1}$, $N_{k1}, \ldots, M_{kn_k}$, N_{kn_k} tako da se prava racionalna funkcija $\frac{P}{Q}$ (P i Q relativno prosti realni polinomi) može rastaviti na parcijalne razlomke u obliku:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_{1i}}{(x - a_1)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{n_j} \frac{A_{ji}}{(x - a_j)^i} + \\ + \sum_{i=1}^{m_1} \frac{M_{1i}x + N_{1i}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^i} + \ldots + \sum_{i=1}^{m_k} \frac{M_{ki}x + N_{ki}}{(x^2 + p_k x + q_k)^i}. \tag{19.6}$$

Prema (19.5) i (19.6) zaključujemo da faktoru $(x - a)^n$ odgovara zbir (prostih razlomaka)

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x - a)^n}; \tag{19.7}$$

a faktoru $(x^2 + px + q)^m$ zbir (parcijalnih razlomaka)

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_m x + N_m}{(x^2 + px + q)^m}, \tag{19.8}$$

pri čemu su $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_m, N_m$ konstante koje treba naknadno odrediti.

---

[1] Podrazumijeva se da su svi parcijalni razlomci oblika $\frac{A_i}{(x-a)^k}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ svedeni na jedan razlomak ovog oblika.

Da bismo odredili konstante $A_{11}, \ldots, M_{knk}, N_{knk}$ u razvoju (19.6) treba brojilac desne strane (dovedene na isti imenilac) izjednačiti sa brojiocem lijeve strane jednakosti (19.6). Tada jednakost (19.6) prelazi u identičnu jednakost dva polinoma, koja, prema teoremi 19.2, povlači jednakost koeficijenata uz iste stepene od x. Tako se dobije sistem linearnih jednačina, čijim se rješavanjem dobiju vrijednosti traženih konstanata (ako je stepen nazivnika veliki onda je jednostavnije odrediti ove konstante uvrštavanjem pogodnih vrijednosti za x u dobijenu identičnu jednakost dva polinoma).

Napomena 19.5. Svaka racionalna funkcija $\frac{P}{Q}$ može se pisati u obliku

$$\frac{P}{Q} = q + \frac{r}{Q},$$

gdje je q polinom (cijela racionalna funkcija) i $\frac{r}{Q}$ prava racionalna funkcija (do čega se dolazi ako se izvrši dijeljenje polinoma P polinomom Q u slučaju da je stepen od P veći ili jednak stepenu od Q).

Primjer 19.5. Razložiti na parcijalne razlomke funkciju

$$f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2}.$$

Rješenje: Definiciono područje date funkcije je

$$D(f) = \{x \in R \mid x \neq 1 \wedge x \neq 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Data funkcija je nesvodljiva prava racionalna funkcija pa se, prema teoremi 19.7, može na jedinstven način razložiti u zbir od konačno mnogo parcijalnih razlomaka (vidjeti (19.6)—(19.8)). U tom smislu posmatrajmo identitet

$$(1) \quad \frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2},$$

gdje su A, B, C, konstante koje treba naknadno odrediti.

Brojilac desne strane (dovedene na isti imenilac) jednak je brojiocu lijeve strane, pa ćemo imati.

$$(2) \quad x + 2 \equiv A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1),$$

odnosno

$$x + 2 \equiv (A + B)x^2 + (C - 4A - 3B)x + (4A + 2B - C).$$

Prema teoremi 19.2. dobijemo sistem linearnih jednačina:

$$A + B = 0 \wedge C - 4A - 3B = 1 \wedge 4A + 2B - C = 2,$$

čije je rješenje $A = 3$, $B = -3$, $C = 4$.

Prema tome, traženo razlaganje je

$$\frac{x+2}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}.$$

Primjer 19.6. Prikazati kao zbir polinoma i parcijalnih razlomaka funkciju

$$x \to \frac{x^8 + 2x^7 + 3x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x}.$$

Rješenje: Budući da je stepen brojnika veći od stepena nazivnika, data funkcija je neprava racionalna funkcija. Ona se (vidjeti napomenu 19.5) može prikazati kao zbir jednog polinoma i prave racionalne funkcije. Dijeleći brojnik sa nazivnikom, dobijemo

$$x^3 - 1 + \frac{x^3 + 1}{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x}.$$

Osim toga, potrebno je izvršiti faktorizaciju (u skupu R) nazivnika date racionalne funkcije, pa se dobije $x(x^2 + x + 1)^2$.
Treba izvršiti sljedeće razlaganje

$$(3) \quad \frac{x^3 + 1}{x(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Konstante A, B, C, D i E možemo odrediti kao i u primjeru 19.5, ali ćemo ih odrediti na drugi način (jer je stepen nazivnika veliki). Naime, dovođenjem desne strane na isti imenilac, identitet (3) se svodi na oblik

$$(4) \quad x^3 + 1 = A(x^2 + x + 1)^2 + x(Bx + C)(x^2 + x + 1) + x(Dx + E).$$

Uzmemo li da je $x = 0$[1], iz identiteta (4) slijedi da je $A = 1$. Kako je $x^2 + x + 1 = 0$ za $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, to uvrštavanjem $x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ u (4) dobijemo $2 = -\frac{1}{2} \cdot (D + E) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(E - D)$, tj. $D + E = -4$ i $E - D = 0$, odakle je $D = E - 2$. Preostale konstante B, C možemo odrediti uvrštavanjem ostalih pogodnih vrijednosti od x u (4) (npr., $x = 1$, $x = -1$). Međutim, ove konstante odredićemo zamjenom nađenih vrijednosti za A, B, D i E u identitet (3):

$$\frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{x^3 + 1}{x(x^2 + x + 1)^2} - \frac{1}{x} + \frac{2x + 2}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x}{x^2 + x + 1},$$

tj. $B = -1$, $C = 0$.

Dakle, traženi prikaz je

$$\frac{x^8 + 2x^7 + 3x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x} = x^3 - 1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + x + 1} - 2\frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

[1] Budući da identitet (3) nije definisan u tački $x = 0$, jednakost (4) treba da vrijedi za svako $x \neq 0$, ali ona tada vrijedi i za svako x, dakle i za $x = 0$.

Zadaci (19.48—19.58)

Razložiti na parcijalne razlomke sljedeće (razlomljene racionalne) funkcije:

19.48. $x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x - 2}{x(x-2)(x+2)}$.

19.49. $x \to \dfrac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(4x^2 - 4x - 15)}$.

19.50. $x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 1}{x(2x-1)^2}$.

19.51. $x \to \dfrac{1}{(a+bx)(1+x^2)}$.

19.52. $x \to \dfrac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)}$.

19.53. $x \to \dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

19.54. $x \mapsto \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^4 - 5x^2 + 4}$.

19.55. $x \to \dfrac{1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$.

19.56. $x \mapsto \dfrac{1}{x^5 - 1}$.

19.57. $x \to \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$.

19.58. Razložiti na zbir polinoma i parcijalnih razlomaka racionalnu funkciju

$$f(x) = \frac{x^{11} + x^{10} + x^9 + 2x^8 + x^7 - x^4 - 2x^3 - x^2 - x - 2}{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1}.$$

20. ARITMETIČKI NIZ. GEOMETRIJSKI NIZ I RED. NEKE SUME

20.1. ARITMETIČKI NIZ

Definicija 20.1. Za niz brojeva

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

kažemo da je *aritmetički niz* ako je svaki njegov član osim prvog jednak zbiru prethodnog člana i stalnog broja d. Aritmetički niz je, dakle, određen formulom

$$a_{n+1} = a_n + d, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Broj d (koji je jednak razlici $a_{n+1} - a_n$) zove se *razlika* ili *diferencija* niza.

Pokazuje se da se n-ti član a_n aritmetičkog niza može izraziti pomoću prvog člana a_1, diferencije d i broja n, po formuli

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{20.1}$$

Za određivanje zbira S_n prvih n članova aritmetičkog niza vrijedi formula

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{20.2}$$

Ova formula može se, na osnovu formule (20.1), napisati ovako:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]. \tag{20.3}$$

Sve tri navedene formule lako se dokazuju matematičkom indukcijom (vidi primjer 3.5).

Zadaci (20.1—20.16)

20.1. Odrediti x tako da brojevi $x + 5$, $25 - x$, $30 + 2x$ čine aritmetički niz.

20.2. Da bi neki niz bio aritmetički, potrebno je i dovoljno da je svaki član toga niza (osim prvog) aritmetička sredina dva od njega jednako udaljena člana. Dokazati.

20.3. Izvesti na induktivan način formulu

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

za zbir aritmetičkog niza, pa je zatim dokazati.

20.4. Dokazati da ne postoji trocifreni prosti prirodni broj a čije bi cifre činile aritmetički niz.

20.5. Naći zbir $A = \log a + \log a^2 + \log a^3 + \ldots + \log a^n$, $0 < a \neq 1$.

20.6. Dokazati tačnost jednakosti

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \ldots + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \log_b a,$$ gdje je $0 < a \neq 1$ i $0 < b \neq 1$.

20.7. Odrediti zbir $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} n^2$.

20.8. Dokazati da je za svaki aritmetički niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ispravna jednakost

$$S = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \ldots + a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2 = \frac{k}{2k-1}(a_1^2 - a_{2k}^2).$$

20.9. Brojevi a^2, b^2 i c^2 čine aritmetički niz. Dokazati da je to potreban i dovoljan uslov da i brojevi $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ i $\frac{1}{a+b}$ čine aritmetički niz.

20.10. Za koje vrijednosti x izrazi

$$\log 2, \log(2^x - 1) \quad \text{i} \quad \log(2^x + 3)$$

čine aritmetički niz?

20.11. Odrediti trocifreni broj $\overline{abc}$ ako cifre a, b i c čine aritmetički niz i ako je taj broj djeljiv sa 45.

20.12. U nekom nizu brojeva, za svako $n > 1$, zbir prvih n članova niza izražen je formulom $S_n = n^2 - 5n$. Dokazati da je taj niz aritmetički i odrediti ga.

20.13. Nizovi

$$5, 8, 11, \ldots, a_m, \ldots,$$
$$3, 7, 11, \ldots, b_n, \ldots$$

imaju oba po 1 000 članova. Koliko oni imaju jednakih članova?

20.14. Odrediti koeficijente polinoma

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

tako da njegove nule x_1, x_2 i x_3 čine aritmetički niz.

20.15. Realni brojevi $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ čine aritmetički niz. Dokazati da je to dovoljan uslov da bi vrijedila jednakost

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

20.16.* Treba odrediti parametar m tako da rješenja bikvadratne jednačine

$$x^4 - (3m+5)x^2 + (m+1)^2 = 0$$

čine aritmetički niz i naći ta rješenja.

20.2. GEOMETRIJSKI NIZ

Definicija 20.2. Niz brojeva

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

kod koga je svaki član osim prvog jednak proizvodu prethodnog člana i stalnog broja $q \neq 0$, zove se *geometrijski niz*. Taj niz je, dakle, određen formulom

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Broj q, koji je jednak količniku $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, zove se *količnik* geometrijskog niza.

Za određivanje n-tog člana a_n niza (pomoću prvog člana a_1, količnika q i broja n) vrijedi formula

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{20.4}$$

Zbir S_n od n prvih članova geometrijskog niza određuje se po formuli

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ ako je } q \neq 1, \tag{20.5}$$

a ako je $q = 1$, tada je, očito,

$$S_n = n \cdot a_1.$$

Ove formule lako se dokazuju matematičkom indukcijom.

Primjer 20.1. Koje uslove moraju zadovoljavati brojevi a, b i c da bi jednovremeno bili tri uzastopna člana aritmetičkog i geometrijskog niza?

Rješenje. Jasno je, da brojvi a, b i c moraju biti različiti od 0 (u protivnom se ne bi moglo govoriti o količniku geometrijskog niza). Na osnovu definicija 20.1. i 20.2, brojevi a, b i c moraju zadovoljavati sljedeći sistem jednačina:

$$b - a = c - b (= d),$$
$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} (= q).$$

Iz prve jednačine sistema slijedi da je

$$b = \frac{a + c}{2}. \tag{20.6}$$

Ova formula vrijedi općenito za svaki aritmetički niz, tj. svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) je aritmetička sredina njemu susjednih, i uopšte prema njemu "simetričnih", članova. Odatle i naziv za aritmetički niz (v. zad. 20.2).

Iz druge jednačine sistema slijedi da je

$$b^2 = ac. \tag{20.7}$$

Znači, svaki član geometrijskog niza (osim prvog) je geometrijska sredina njemu dva susjedna, pa i uopšte simetrična, člana (v. zad. 20.17). Odatle dolazi i naziv za geometrijski niz.

Iz jednakosti (20.6) i (20.7) slijedi jednakost

$$(a - c)^2 = 0,$$

odakle slijedi da je

$$a = c.$$

Odatle i iz jednakosti (20.6) slijedi da je

$$b = c.$$

Prema tome, brojevi a, b i c su tri uzastopna člana i aritmetičkog i geometrijskog niza ako je

$$a = b = c \neq 0.$$

Zadaci (20.17—20.36)

20.17. Dokazati da je svaki član (osim prvog) geometrijskog niza geometrijska sredina dva od njega "jednako udaljena" člana.

20.18. Ustanoviti prirodu korijena jednačine $ax^2 - 2bx + c = 0$, ako koeficijenti a, b i c čine geometrijski niz.

20.19. Tri broja čiji je zbir jednak 62, a zbir njihovih dekadskih logaritama 3, čine geometrijski niz. Naći te brojeve.

20.20. Koliko članova niza 1, 10, 100,... treba sabrati da bi se dobio zbir 111 111?

20.21. U skupu N prirodnih brojeva definisana je funkcija f formulom $f(n) = f(n-1) + a^n$ i uslovom da je $f(1) = 1$. Treba izraziti $f(n)$ pomoću a i n.

20.22. Odrediti dovoljan uslov uz koji je polinom

$$P(x) = x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1$$

djeljiv polinomom

$$Q(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1.$$

20.23. Za koje vrijednosti $n \in N$ je polinom

$$P(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2}$$

djeljiv polinomom

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}?$$

20.24. Tri realna broja a, b i c čine aritmetički niz, a njihovi kvadrati (uzeti u istom poretku) čine geometrijski niz. Treba odrediti količnik toga geometrijskog niza.

20.25. Dokazati da su svi brojevi a oblika

$$a = 2^{5n-1} + 2^{5n-2} + 2^{5n-3} + \ldots + 2^2 + 2 + 1, \; n \in N$$

djeljivi sa 31.

20.26. Između broja 3 i broja x stavi se jedan broj tako da ta tri broja čine aritmetički niz. Ako se srednji član toga niza umanji za 6, dobije se geometrijski niz. Treba odrediti broj x.

20.27. Brojevi 49, 4489, 444889,... se dobiju tako što se "u sredini" svakog prethodnog ubaci broj 48. Dokazati da su svi takvi brojevi potpuni kvadrati prirodnog broja.

20.28. Dokazati da je broj

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1,\ n \in N$$

kvadrat cijelog broja.

20.29. Dokazati da je broj

$$a = \underbrace{111\ldots111}_{2n \text{ cifara}} - \underbrace{222\ldots222}_{n \text{ cifara}}$$

kvadrat nekog prirodnog broja b i odrediti broj b.

20.30. U izrazima

$$a_1 = 8^{x+\log_2 y},\quad a_2 = 2^{x-\log_2 y},\quad a_3 = 5y$$

treba odrediti x i y tako da niz a_1, a_2, a_3 bude i aritmetički i geometrijski.

20.31. Riješiti nejednačinu

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{x-1} + a^x \geqslant (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$$

u skupu N za sve vrijednosti $a \in R$, $a > 0$.

20.32. Odrediti 4 broja od kojih tri prva čine geometrijski, a tri posljednja aritmetički niz, ako je zbir krajnjih brojeva 14, a zbir srednjih 12.

20.33. Odrediti zbir

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n,\ n \in N.$$

20.34. Treba naći vezu između koeficijenata a, b i c tako da nule x_1, x_2 i x_3 polinoma

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

obrazuju geometrijski niz.

20.35. Odrediti zbir

$$S = x + x^2(1 + x) + x^3(1 + x + x^2) + \ldots + x^n(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}).$$

20.36.* Aritmetički i geometrijski niz s pozitivnim članovima imaju prva dva člana jednaka. Dokazati da nijedan član aritmetičkog niza nije veći od odgovarajućeg člana geometrijskog niza.

20.3. BESKONAČNI KONVERGENTNI GEOMETRIJSKI RED

Definicija 20.3. Za izraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ članovi geometrijskog niza, kažemo da je *beskonačni geometrijski red*. Za količnik q geometrijskog niza kažemo da je količnik odgovarajućeg geometrijskog reda.

Ako je $|q| < 1$, pokazuje se da ima smisla govoriti o zbiru S beskonačnog geometrijskog reda. Taj se zbir određuje po formuli

$$S = \frac{a_1}{1 - q}. \tag{20.8}$$

Za geometrijski red kod koga je $|q| < 1$ kažemo da je *konvergentan*.

Primjer 20.2. Dokažimo da je broj

$$r = 0,\dot{k}_1\dot{k}_2\ldots\dot{k}_n,$$

kod koga se klasa $k_1 k_2 \ldots k_n$ cifara $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ponavlja, racionalni broj.

Rješenje. Zadatak se svodi na to da se dokaže da je

$$r = \frac{p}{q}, p, q \in Z, \quad q \neq 0.$$

Označimo li n-cifreni broj $k_1 k_2 \ldots k_n$ sa t, tada imamo:

$$r = \frac{t}{10^n} + \frac{t}{10^{2n}} + \frac{t}{10^{3n}} + \ldots .$$

Pošto je u gornjem redu količnik između svakog člana i prethodnog člana

$$q = \frac{\frac{t}{10^{2n}}}{\frac{t}{10^n}} = \frac{1}{10^n}$$

stalan broj, imamo geometrijski red količnika $q = \frac{1}{10^n}$. Pošto je $|q| < 1$, taj je red konvergentan, tj. postoji zbir toga reda i prema formuli (20.8) imamo:

$$r = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{t}{10^n}}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{t}{10^n - 1} = \frac{t}{\underbrace{99\ldots9}_{n}}.$$

Dakle,

$$r = \frac{k_1 k_2 \ldots k_n}{\underbrace{99\ldots9}_{n}},$$

što znači da je r racionalan broj.

Zadaci (20.37—20.47)

20.37. Naći sumu beskonačne geometrijske progresije (niza)

$$(\sin\alpha\cos\alpha)^2, \left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right)^2, \left(\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{4}\right)^2, \ldots .$$

20.38. Napisati broj $0,\dot{2}\dot{1}$ u obliku razlomka.

20.39. Dokazati da je broj $0,1\dot{2}$ racionalan.

20.40. Naći sumu:

a) $S = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \ldots$; b) $S = 3 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \ldots .$

20.41. U beskonačnom konvergentnom geometrijskom redu zbir svih članova je dva puta veći od zbira prvih n članova. Treba naći proizvod prvih n članova, ako je prvi član jednak $\sqrt{2}$.

20.42. Riješiti jednačinu

$$1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots = 2.$$

20.43. Ispitati da li geometrijski niz čiji je prvi član 6, količnik $\frac{1}{3}$, a zbir 9, ima konačno mnogo ili beskonačno mnogo članova.

20.44. U pravilnom šestouglu $ABCDEF$ iz tjemena A povuče se duž $AN_1 \perp BE$, gdje je N_1 tačka dijagonale BE. Zatim se povuče duž $N_1N_2 \perp CF$, $N_2 \in CF$ itd. u beskonačnost. Treba naći odnos između obima S_1 šestougla i zbira S svih tih normala.

20.45. U jednakostranični trougao stranice a upisan je krug. Zatim su upisana tri kruga koji diraju prvi krug i po dvije stranice trougla. Dalje se nastavi upisivanje po tri nova kruga na isti način i tako u beskonačnost. Treba pomoću a izraziti dio površine P trougla koji nije prekriven krugovima.

20.46.* Odrediti one vrijednosti $x \in R$ za koje je definisan izraz $\log_{(7x^2-4x)}(x^4 - 4x^3 + 5x^2)$ i koje su istovremeno iz intervala $(0, \dot{y}; y)$, gdje je y rješenje jednačine $1 + 7 + 13 + \ldots + y = 280$.

20.47.* Dati su izrazi:

$$1 - \sqrt{1 - 4\log_a x}, \quad b\log_a x, \quad 1 + \sqrt{1 - 4\log_a x}.$$

a) Za koje vrijednosti varijable x i parametara a i b ti izrazi znače tri susjedna člana geometrijskog niza u području realnih brojeva?

b) Da li je za takve vrijednosti a, b i x odgovarajući beskonačni geometrijski red konvergentan?

20.4. NEKE SUME

Zadaci (20.48—20.62)

20.48. Dokazati da za svaki prirodni broj n vrijedi jednakost

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

20.49. Dokazati da je zbir kvadrata prvih n neparnih brojeva jednak $\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.

20.50. Naći zbir n brojeva oblika 1, 11, 111, 1111, ...

20.51. Ako pozitivni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čine aritmetički niz, izračunati

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}.$$

Izračunati sljedeće sume:

20.52. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$

20.53. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$

20.54. $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + n(n+1)^2.$

20.55. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$

20.56. Riješiti u skupu N prirodnih brojeva jednačinu

$$\frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2x-1)}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{x(x+1)}} = 110.$$

Izračunati sljedeće sume ugledajući se na zadatak 20.55.

20.57. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

20.58. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

20.59. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$

20.60. Ako brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ čine aritmetički niz tako da je $a_k \neq 0$ za svaku vrijednost $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, izračunati

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k a_{k+1}}.$$

Odrediti sume:

20.61.* $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \ldots + n \cdot x^n.$

20.62.* a) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1) \cdot 2^k = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2^3 + \ldots + (2n+1) \cdot 2^n;$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}}.$

Drugi dio

UPUTE, RJEŠENJA I REZULTATI ZADATAKA

1. ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE

1.1. *Uputa*: Sve navedene osobine se lako dokazuju pomoću (ili bez) tablica vrijednosti istinitosti. Dokažimo, npr., prvu formulu pod f). Odgovarajuća tablica vrijednosti istinitosti je:

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Iz posljednje kolone slijedi da je prva formula pod f) tautologija, što dokazuje da je konjunkcija distributivna prema disjunkciji.

1.2. a)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Iz jednakosti četvrte i sedme kolone slijedi da je tačna prva formula pod a).

1.3. *Rješenje*: a) Kada data iskazna formula ne bi bila tautologija, postojale bi istinitosne vrijednosti za p i q takve da bi istinitosna vrijednost cijele formule bila $\bot$. Tada bi istinitosna vrijednost od $\neg p$, prema definiciji 1.5, morala biti $\bot$, tj. $p = \top$, a istinitosna vrijednost od $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$ morala bi biti $\top$. Zato bi, po definiciji 1.3, moralo biti $\neg q = \top$, tj. $q = \bot$ i $p \Rightarrow q = \top$, tj. $p = \bot$ (jer je $q = \bot$). Ne može, međutim, biti istovremeno $p = \top$ i $p = \bot$.

b) Kada bi ova ekvivalencija bila netačna, morale bi njene strane imati različite istinitosne vrijednosti. Tada bi p i q, odnosno $\neg p$ i $\neg q$ morali, s jedne strane, imati iste istinitosne vrijednosti, a s druge suprotne, što je kontradikcija.

Formule c), d) i e) se dokazuju analogno.

1.4. *Rješenje*: Pošto je implikacija $x \Rightarrow y$ (po def. 1.5.) netačna jedino ako je $x = \top$ i $y = \bot$, mora biti:

$$p = \top,$$
$$\neg q \Rightarrow r = \bot.$$

Iz istog razloga mora biti:

$$\neg q = \top,$$
$$r = \bot.$$

Dakle, imamo:

$$p = \top,\ q = \bot,\ r = \bot.$$

1.5. *Rješenje*: a) Formirajmo istinitosnu tablicu iskaza $p \Rightarrow p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Vidimo da iskaz $p \Rightarrow p \wedge q$ ima vrijdenost $\top$, ako je:

$$1^\circ\ p = q = \top; \qquad 2^\circ\ p = q = \bot; \qquad 3^\circ\ p = \bot,\ q = \top.$$

Dakle, rješenja date jednačine su:

$$(p, q) = (\top, \top): \quad (p, q) = (\bot, \top): \quad (p, q) = (\bot, \bot).$$

b) $(p, q) = (\top, \bot)$; $(p, q) = (\bot, \top)$:

c) $(p, q) = (\top, \top)$; $(p, q) = (\top, \bot)$: $(p, q) = (\bot, \bot)$.

1.6. a) $[(1 + 1)\cdot 0] + [(0 + 1)\cdot 1] + 1 = (1\cdot 0) + (1\cdot 1) + 1 = 0 + 1 + 1 = 1$.

b) 0.

1.7. *Rješenje*: a) Od svakog prirodnog broja x postoji veći prirodan broj y. Ova formula je tačna.

b) Postoji prirodan broj y koji je veći od svakog prirodnog broja x. Ova formula je netačna.

Primjedba: Vidi se da je u formuli koja sadrži i kvantifikator $\forall$ i kvantifikator $\exists$ bitan poredak kvantifikatora.

1.8. *Rješenje*: a) Formula je tačna, jer tvrdi da za bilo koja dva prirodna broja postoji prirodan broj koji predstavlja njihov zbir.

b) Tvrdnja nije tačna, jer ne važi za svaka dva prirodna broja x i z. Npr., za $x = 5$, $z = 3$ ne postoji prirodan broj y takav da je $5 + y = 3$.

c) Tvrdnja je tačna, jer za svaka dva cijela broja x i z postoji cio broj y koji predstavlja razliku broja z i broja x, tj. koji zadovoljava jednakost $x + y = z$.

1.9. Sve posmatrane ekvivalencije su tačne i mogle bi se, na primjer, iskazati ovako:

a) Ako nije tačno da za svako x vrijedi $P(x)$, onda postoji bar jedno x za koje nije tačno $P(x)$ i obratno, ako postoji x za koje nije tačno $P(x)$, onda nije tačno da za svako x vrijedi $P(x)$.

c) Ako nije tačno da je za svako x formula $P(x)$ netačna, onda je ona tačna bar za jedno x i obratno.

1.10.* *Rješenje*: a) Neka je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ data iskazna funkcija. Očito f može biti predstavljena nekom istinitosnom tablicom sa 2^n redova. Numerišimo redove te tablice brojevima 1, 2, 3, ..., 2^n. Za svako $l \in N$, $1 \leqslant l \leqslant 2^n$ sa C_l označimo konjunkciju $x_1^l \wedge x_2^l \wedge \ldots \wedge x_n^l$ gdje x_k^l je p_k ako u l-tom redu tablice x_k ima vrijednost $\top$, a x_k^l je $\neg p_k$ ako x_k u tom redu ima vrijednost $\bot$. Označimo sa A disjunkciju svih C_l takvih da funkcija f u l-tom redu tablice ima vrijednost $\top$. (Ako takvih vrijednosti nema, tada funkcija f uvijek prima vrijednost $\bot$, pa se može predstaviti iskaznom formulom $p \wedge (\neg p)$. Istinitosna funkcija određena formulom, A, poklapa se sa f. Zaista, neka $p_1, p_2, \ldots, p_n$, na proizvoljan način, prime vrijednost $\top$ i $\bot$, i pretpostavimo da u tablici funkcije f $x_1, x_2, \ldots, x_n$ primaju iste vrijednosti respektivno u k-tom redu. Disjunktivni član C_k pri tom izboru vrijednosti za $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ima vrijednost $\top$ (jer ako je $p_i = x_i = \bot$, tada je $x_i^k = \neg p_i = \top$, a ako je $p_i = x_i = \top$, tada je $x_i^k = p_i = \top$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Svi ostali disjunktivni članovi C_j imaju tada vrijednost $\bot$ (jer se C_j i C_k razlikuju bar po vrijednosti jedne varijable — po konstrukciji istinitosne tablice). Ako je vrijednost funkcije f, za dati izbor vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u k-tom redu jednaka $\top$, onda je C_k jedan od disjunktivnih članova u formuli A, pa je njena vrijednost u tom slučaju $\top$. Ako je, pak, odgovarajuća vrijednost funkcije f jednaka $\bot$, C_k nije član formule A, pa pošto su vrijednosti svih ostalih C_j jednake $\bot$, to je i vrijednost disjunktivne formule A jednaka $\bot$. Dakle, odgovarajuće vrijednosti funkcije $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i formule A se uvijek poklapaju, čime je tvrdnja pod a) dokazana.

b) $A = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$.

1.11.* *Uputa*: Vidi rješenje prethodnog zadatka. To je formula:

$$A = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r).$$

1.12.* Na osnovu zadatka 1.4. znamo da se svaka iskazna funkcija može predstaviti iskaznom formulom u kojoj učestvuju samo logički simboli $\neg$, $\wedge$ i $\vee$. No vrijede ekvivalencije koje se lako provjeravaju:

$$1^\circ\ p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q); \qquad 2^\circ\ p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q);$$

$$3^\circ\ p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q),\ p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q).$$

Odatle slijedi da se svaka iskazna funkcija može predstaviti iskaznom formulom koja sadrži samo par logičkih simbola:

$$1^\circ\ \neg, \wedge \text{ ili } 2^\circ\ \neg, \vee \text{ ili } 3^\circ\ \neg, \Rightarrow.$$

2. O SKUPOVIMA

2.1. a) $A = \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}$.

b) $A = \{x \in N : x < 50 \wedge x = 7y + 3 \wedge y \in N \cup \{0\}\}$.

2.2. a) $x \in A \Rightarrow x \in \{1, 1, 1, 1\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x \in \{1\} \Rightarrow x \in B$:

$x \in B \Rightarrow x \in \{1\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x \in \{1, 1, 1, 1\} \Rightarrow x \in A$.

Pošto je, dakle, $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, to je, na osnovu definicije 2.2, $A = B$.

b) $x \in C \Rightarrow x \in \{1, 2, 2\} \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2) \Rightarrow x \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in D$:

$x \in D \Rightarrow x \in \{1, 2\} \Rightarrow (x = 1 \vee x = 2) \Rightarrow x \in \{1, 2, 2\} \Rightarrow x \in C$.

Prema tome je $C = D$.

2.3. Skup $\{\emptyset\}$ ima 1 element – to je prazan skup, dok prazan skup nema nijednog elementa, pa se ta dva skupa razlikuju. Oni se razlikuju i od skupa $\{\{\emptyset\}\}$, jer ovaj ima, kao svoj jedini element $\{\emptyset\}$, koji se razlikuje od $\emptyset$, pa je $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$.

Na ovaj se način može definisati beskonačno mnogo skupova:

$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, ..., $\{\{\ldots\{\emptyset\}\ldots\}\}$, ... koji su međusobno različiti.

2.4. a) $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$; b) $\{\emptyset, \{x, y\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{x, y\}\}$.

2.5. Pošto je $X = \{x : x \neq 0\} = \{0\}$, $Y = \emptyset$, to je

$$X \cup Y = \{0\} \cup \emptyset = \{0\}.$$

2.6. *Rješenje. Prvi način.*

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}, \quad B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}.$$

Zato je

$$A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\} = \{x \in N : x = 6n, n \in N\}.$$

Drugi način. Neka je $x \in A \cap B$. Tada je $x \in A$, pa je $x = 2n$ za neko $n \in N$, tj. $2 \mid x$. Dalje je $x \in B$, pa $3 \mid x$. Zato je $x = 6p$, $p \in N$. Obrnuto, neka je $x = p$, $p \in N$, tada je $x = 2 \cdot (3p) \in A$ i $x = 3 \cdot (2p) \in B$, pa je $x \in A \cap B$. Traženi skup je

$$A \cap B = \{x \in N : x = 6n, n \in N\}.$$

2.7. Za $x \geq 2$ je $x \cdot \sqrt[4]{x - 2} \in R$. Ako je $x < 2$, tada je $x \cdot \sqrt[4]{x - 2} \in R$ samo za $x = 0$. Prema tome je

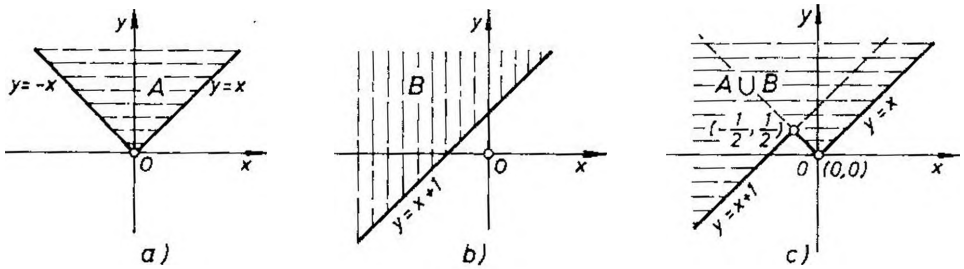
$$A = \{0\} \cup [2, +\infty).$$

Pošto je

$$B = \{x \in R : -8 < x + 4 < 8 \wedge -4 < x - 2 < 4\} = \ldots = (-2, 4), \text{ to je}$$

$$A \cap B = \{0\} \cup [2, 4).$$

2.8. a) O tome kako se određuje oblast ravni koja odgovara skupu A, odnosno B vidjeti u zadatku 13.9. Skup A je grafički prikazan na slici 2.1. a), skup B na slici b), a skup $A \cup B$ na slici c).

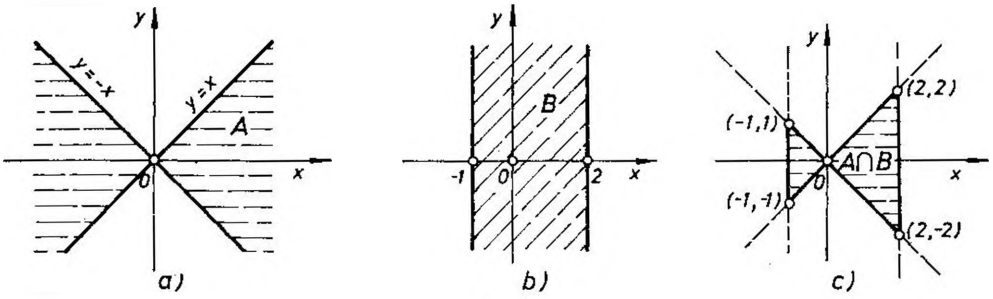


Sl. 2.1.

Da bi se skup $A \cup B$ predstavio analitički, treba naći presječnu tačku $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ linija $y = |x|$ i $y = x + 1$, pa je

$$A \cup B = \{(x, y) \in R^2 : (x \leqslant -\frac{1}{2} \wedge y \geqslant x + 1) \vee (-\frac{1}{2} < x \leqslant 0 \wedge y \geqslant -x) \vee (x > 0 \wedge y \geqslant x)\}.$$

b) Skupovi A, B i $A \cap B$ predstavljeni su na slici 2.2.

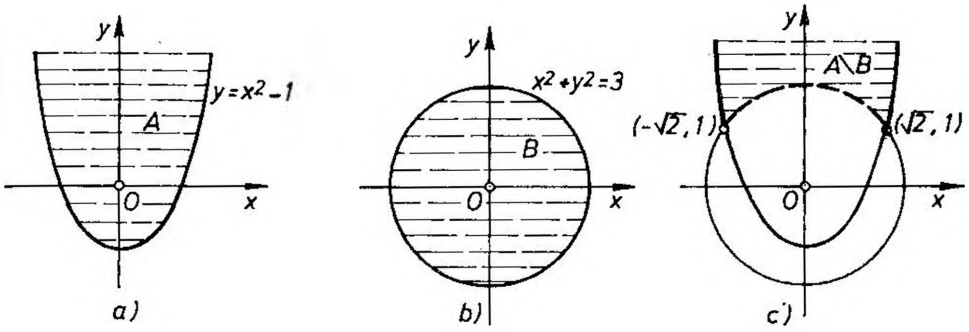


Sl. 2.2.

Napominjemo da se skup A može pisati i ovako $A = \{(x, y) \in R^2 : |y| \leqslant |x|\}$.

$$A \cap B = \{(x, y) \in R^2 : [(-1 \leqslant x \leqslant 0 \wedge (x \leqslant y \leqslant -x)] \vee [0 \leqslant x \leqslant 2 \wedge (-x \leqslant y \leqslant x)]\}.$$

c) Grafički prikaz je dat na slici 2.3.



Sl. 2.3

$$A \setminus B = \{(x, y) \in R^2 : (x \leqslant -\sqrt{2} \wedge y \geqslant x^2 - 1) \vee (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \wedge y \geqslant \sqrt{3 - x^2}) \vee$$
$$\vee (x \geqslant \sqrt{2} \wedge y \geqslant x^2 - 1)\}.$$

2.9. *Rješenje.* Posmatrajmo implikaciju

(1) $\qquad x \in \varnothing \Rightarrow x \in A,$

gdje je A proizvoljan skup. Tvrdnja $x \in \varnothing$ je netačna, pa vidimo da je implikacija (1) uvijek tačna, a to, po definiciji 2.1. podskupa, znači da je

$$\varnothing \subseteq A.$$

2.10. Tačnost jednakosti a) i b) slijedi iz definicije unije i presjeka skupova, odnosno na osnovu osobine komutativnosti disjunkcije i konjunkcije iskaza.

Ovdje ćemo dokazati jednakost *f*):

$$[x \in A \cap (B \cup C)] \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)] \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow [x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)].$$

Prema tome, svaki element skupa $A \cap (B \cup C)$ također je element skupa $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ i obrnuto, pa su ti skupovi jednaki.

2.11. Evo kako se dokazuje jednakost b):

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow \neg (x \in A \vee x \in B).$$

$$x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\neg x \in A) \wedge (\neg x \in B).$$

Ako umjesto $x \in A$ pišemo p, a umjesto $x \in B$ pišemo q, tada je tvrdnja $x \in \overline{A \cup B}$ ekvivalentna sa $\neg (p \vee q)$, a $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ sa $(\neg p) \wedge (\neg q)$. Kako je iskazana formula

$$\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$$

tautologija, to vrijedi i za formulu

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Prema tome je $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2.13. Evo dokaza formule c):

$$(A \cap B) \setminus C \overset{a)}{=} (A \cap B) \cap \overline{C} \overset{b)}{=} (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) \overset{a)}{=} (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$$

2.14. a) Dokažimo tačnost ekvivalencije $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$.

Iz odnosa $A \subseteq B$ slijedi da je $A \subseteq A \cap B$. Kako je uvijek $A \cap B \subseteq A$, to je $A \cap B = A$. Obrnuto, iz odnosa $A \cap B = A$ slijedi da je $A \subseteq B$.

Slično se dokazuje ekvivalencija $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$.

2.15. *Prvi način.* Koristi se formulama na lijevoj strani implikacije i dokaži tačnost ekvivalencije $x \in B \Leftrightarrow x \in C$.

Drugi način. Označi predikate $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$ sa p, q i r, pa dokaži (pomoću tablica istinitosti) tautologičnost formule, koju treba ispisati tako da je ekvivalentna posmatranoj formuli.

2.16. Uputa: datim implikacijama pridruži odgovarajuće iskazne formule i ustanovi da one nisu tautologije, što znači da implikacije nisu tačne.

2.17. a) Vidi uputu za prethodni zadatak, pridružujući iskazne formule relacijama $(A \cup B \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup B$ i $(A \setminus C) \cup B \subseteq (A \cup B) \setminus C$. Pokaže se da je prva formula tautologija, a druga nije. Sve isto vrijedi u slučaju b).

2.18. *Prvo rješenje.* Dajemo dokaz formule a) pomoću matematičke indukcije.

1° Za $n = 1$ imamo: $\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{1} A_i\right)} = \overline{A_1} = \bigcup_{i=1}^{1} \overline{A_i}$.

2° Neka je formula tačna za broj $n = k \geq 1$, tj. neka je

$$\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}.$$

Tada imamo: $\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right)} = \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}}$ = (prema zadatku 2.14. c))

$$= \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)} \cup \overline{A}_{k+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \overline{A_i}\right) \cup \overline{A}_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k+1} \overline{A_i}.$$

Drugo rješenje.

$$x \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow (\exists i)\, x \notin A_i \Leftrightarrow (\exists i)\, x \in \overline{A_i} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

2.19. *Rješenje.*

$$\left[x \in B \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)\right] \Leftrightarrow \left[\left(x \in B\right) \vee \left(x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x \in B) \vee (\forall \lambda \in \Lambda) x \in A_\lambda] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\forall \lambda \in \Lambda\right)(x \in B \vee x \in A_\lambda)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\forall \lambda \in \Lambda\right) x \in B \cup A_\lambda\right] \Leftrightarrow \left[x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \left(B \cup A_\lambda\right)\right].$$

2.20. Postupak rješavanja sličan je kao kod prethodnog zadatka.

2.21. Riješićemo ovdje zadatak a).

$$\left[x\in\overline{\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)}\right]\Leftrightarrow\left[\neg\left(x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\right]\Leftrightarrow[\neg(\exists\lambda\in\Lambda)x\in A_\lambda]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(\forall\lambda\in\Lambda)\neg(x\in A_\lambda)]\Leftrightarrow[(\forall\lambda\in\Lambda)x\notin A_\lambda]\Leftrightarrow$$

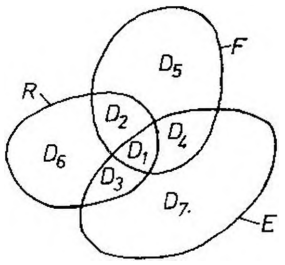
$$\Leftrightarrow\left[\left(\forall\lambda\in\Lambda\right)x\in\overline{A_\lambda}\right]\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}.$$

2.22. Ovdje ćemo riješiti slučaj d).

Kako je $X\cap Y=\{1,2,3,4\}$, to je $\{1,2,3,4\}\subseteq X$, pa je $4\in X$. Kada bi bilo $6\in X$, tada bi bilo $\{4,6\}\subseteq X$, što nije. Dakle, $6\notin X$. Kako je, dalje, $X\cup Y=\{1,2,3,4,5,6\}$, to je $6\in X\cup Y$, pa pošto $6\notin X$, mora biti $6\in Y$. Odatle zaključujemo da je $6\in Y\setminus X$, pa ne može biti $5\in Y\setminus X$, jer bi tada bilo $\{5,6\}\subseteq Y\setminus X$. Dakle, $5\notin Y\setminus X$, tj. $\neg(5\in Y\wedge 5\notin X)$, ili $(5\notin Y\vee 5\in X)$. Ako je $5\in X$, onda ne može biti $5\in Y$, jer bi bilo $X\cap Y=\{1,2,3,4,5\}$. Dakle, $5\notin Y$. Slučaj $5\notin X$ ne može nastupiti – obrazložiti. Dobije se da je

$$X=\{1,2,3,4,5\},\quad Y=\{1,2,3,4,6\}.$$

2.23.* Neka nam na Venovom dijagramu skup R predstavlja skup prevodilaca koji znaju ruski, skup E prevodilaca koji znaju engleski, a skup F neka je skup prevodilaca koji znaju francuski jezik. Prema slici vrijede sljedeće jednakosti:



$$R\cup E\cup F=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4\cup D_5\cup D_6\cup D_7,$$
$$R=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_6,\ E=D_1\cup D_3\cup D_4\cup D_7,$$
$$F=D_1\cup D_2\cup D_4\cup D_5.$$
$$R\cap F=D_1\cup D_2,\ R\cap E=D_1\cup D_3,\ E\cap F=D_1\cup D_4.$$

Skupovi $D_1, D_2, \ldots, D_7$ su disjunktni. Označimo, redom, sa a, b, c, d, e, f, i g brojeve elemenata tih skupova, pa imamo:

$$a+b+c+d+e+f+g=30,$$
$$a+b+c+f=13,$$
$$a+c+d+g=17,$$
$$a+b+d+e=12,$$
$$a+b=5,$$
$$a+c=5,$$
$$a+d=5.$$

Kada se riješi ovaj sistem jednačina, dobije se da je

broj elemenata skupa $R\cap F\cap E$ $\quad a=3$.
broj elemenata skupa $R\setminus(F\cup E)$ $\quad f=6$.

Odgovor: sva tri jezika govore 3 prevodioca, a jedino ruski jezik govori 6 prevodilaca.

2.24. Učenika koji uče njemački i ruski ima $35-(3+5+4+1+2)=20$.

2.25.* Može se pogledati zadatak 2.23.*, a može se raditi i ovako: Označimo pomenuta društva kratko sa DMM, DMF i DMH. Od 15 članova DMM njih 7 su članovi DMF, a 6 članovi DMH. Pošto su 4 učenika članovi sva tri društva, to imamo $7-4=3$ člana DMM i DMF koji nisu članovi DMH, a $6-4=2$ člana DMM i DMH koji nisu članovi DMF. Znači, ima $15-(4+3+2)=6$ članova DMM koji nisu članovi DMF niti DMH.

Slično se zaključuje da su 3 učenika članovi samo DMF, a 1 učenik član samo DMH.

Učenika koji nisu članovi nijednog društva ima

$$35-[(4+3+2+6)+(4+3)+1]=12.$$

2.26. a) $\mathscr{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$; b) $\mathscr{P}(\{a\})=\left\{\emptyset,\{a\}\right\}$;

c) $\mathscr{P}(\{a,b\})=\left\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\right\}$;

d) $\mathscr{P}(\{a,b,c\})=\left\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\right\}$.

2.27. a) $\mathcal{P}^2(\emptyset) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}$.

b) $\mathcal{P}^3(\emptyset) = \mathcal{P}(\emptyset, \{\emptyset\}) = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}$.

2.28. a) $[X \in \mathcal{P}(A \cap B)] \Leftrightarrow [X \subseteq A \cap B] \Leftrightarrow [X \subseteq A \wedge X \subseteq B] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B)] \Leftrightarrow [X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)]$.

Odatle se zaključuje da je $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

2.29. Dovoljno je uzeti da $A \not\subseteq B$ niti $B \subseteq A$, jer tada

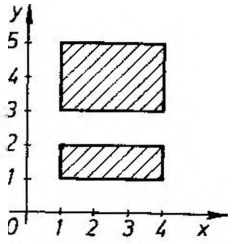
$A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$, ali $A \cup B \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Možemo uzeti, recimo $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.

2.30. Uputa: dovoljno je uzeti da je $A \subset B$, na primjer, $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$.

2.31. $A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\} = \{(1, c), (1, d), (1, e), (2, c), (2, d), (2, e), (3, c), (3, d) (3, e)\}$. Skup $B \times A$ je skup $\{(y, x): y \in B \wedge x \in A\}$.

2.32. Skup $A \times B$ je prikazan na slici 2.4.



Sl. 2.4.

2.33. Dokazaćemo samo jednakost a):

$$\begin{gathered} z = (x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x \in A \cup B \wedge y \in C) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((x, y) \in A \times C \vee (x, y) \in B \times C) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z \in (A \times C) \cup (B \times C). \end{gathered}$$

Dakle,

$$[z \in (A \cup B) \times C] \Leftrightarrow [z \in (A \times C) \cup (B \times C)],$$

što znači da vrijedi jednakost

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C).$$

2.34. Vidjeti prethodni zadatak.

2.35. Evo primjera za dio b) zadatka:

$$A = \{1\},\ B = \{2\},\ C = \{3\},\ D = \{4\}.$$

2.36. Na osnovu zadatka 2.33. a) imamo:

$$\begin{gathered} (A \cup B) \times (C \cup D) = [(A \cup B) \times C] \cup [(A \cup B) \times D] = \\ = [(A \times C) \cup (B \times C)] \cup [(A \times D) \cup (B \times D)] = \ldots = \\ = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D). \end{gathered}$$

2.37. Na osnovu zadatka 2.33. c) imamo:

$$(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C = \emptyset \times C = \emptyset.$$

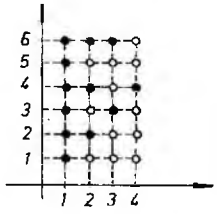
4. BINARNE RELACIJE

4.1. *Rješenje.* Pošto je $S \times S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$,
prema definiciji 4.1, imamo:

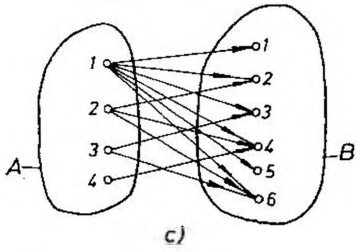
$\varrho_1 = \emptyset$, $\varrho_2 = \{(a, a)\}$, $\varrho_3 = \{(a, b)\}$, $\varrho_4 = \{(b, a)\}$,
$\varrho_5 = \{(b, b)\}$, $\varrho_6 = \{(a, a), (a, b)\}$, $\varrho_7 = \{(a, a), (b, a)\}$,
$\varrho_8 = \{(a, a), (b, b)\}$, $\varrho_9 = \{(a, b), (b, a)\}$,
$\varrho_{10} = \{(a, b), (b, b)\}$, $\varrho_{11} = \{(b, a), (b, b)\}$.

4.2. Skup $\mathcal{S}(S)$ je $\mathcal{S}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,
a relacija ϱ je
$\varrho = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{1, 2\}), (\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 2\}), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{1, 2\}), (\{1, 2\}, \{1, 2\})\}$.

4.3. *Rješenje.* a) $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)\}$.



b)

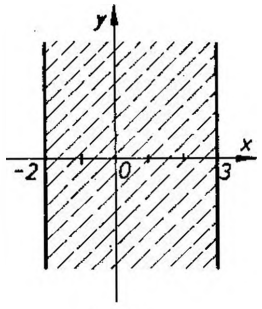


c)

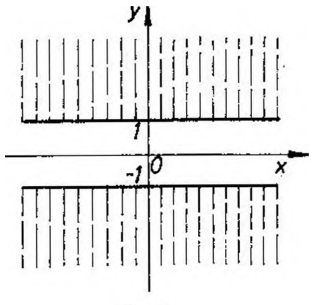
4.4. a) Broj x je u relaciji ϱ sa y, tj. $x \varrho y$ ako je x dva puta manji od y.
b) $\varrho = \{(x, y) \in S \times S : y = 2x\}$.

4.5. a) $\varrho = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$;
b) $\varrho = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$;
c) $\varrho = \{(1, 1), (2, 4)\}$.

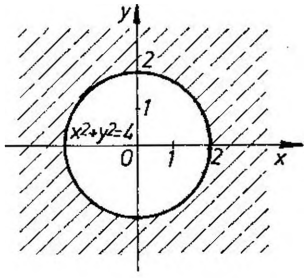
4.6. Relacija u a) predstavljena je na slici 4.1. To je pruga ravni između pravih čije su jednačine $x = -2$ i $x = 3$. Relacija u b) predstavljena je na slici 4.2.



Sl. 4.1.



Sl. 4.2.



Sl. 4.3.

4.7. Za sve tačke kružnice k (0,4) na slici 4.3. vrijedi jednakost

$$x^2 + y^2 = 4$$

i ona vrijedi samo za te tačke. Preostali dio ravni kružnica k dijeli na dvije disjunktne oblasti: unutarnju u kojoj je tačka O (0,0) i vanjsku u kojoj ta tačka nije. Za koordinate tačke O (0,0) imamo:

$$0^2 + 0^2 > 4 \Leftrightarrow 0 > 4.$$

Pošto nije tačno da je $0 > 4$, par (0,0) ne pripada relaciji ϱ. Isti je slučaj za sve tačke unutarnje oblasti kružnice.

Znači, grafik relacije ϱ je vanjska oblast kružnice k.

4.8. $\varrho^{-1} = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1)\}$.

4.9. a) $\varrho = \{(5, 4), (10, 3), (15, 2), (20, 1)\}$,
$\varrho^{-1} = \{(1, 20), (2, 15), (3, 10), (4, 5)\}$,
$\varrho^{-1} = \{(x, y) \in N \times N : 5x + y = 25\}$;
b) $\varrho = \emptyset$, $\varrho^{-1} = \emptyset$, $\varrho^{-1} = \{(x, y) \in N \times N : 3x + 3y = 7\}$;
c) $\varrho = \{(1, 1,)\}$, $\varrho^{-1} = \{(1, 1)\}$, $\varrho^{-1} = \{(x, y) \in N \times N : 2x + y = 3\}$.

4.10. $\varrho = \{(3, 4), (3, 5), (3, 7), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (5, 7), (6, 5), (6, 7), (7, 3), (7, 4), (7, 5), (7, 6)\}$.
Relacija ϱ nije refleksivna, jer za svaki $x \in S$ vrijedi:

$$D(x, x) = x > 1, \text{ tj. } D(x, x) \neq 1.$$

Ova je relacija, u stvari, antirefleksivna. Relacija je simetrična, a nije tranzitivna (tako je $3 \varrho 4$ i $4 \varrho 3$, ali nije $3 \varrho 3$).

4.11. Graf relacije ϱ je

$$\varrho = \{(2, 4), (4, 3), (6, 2), (8, 1)\},$$

i lako se vidi da je relacija antirefleksivna, antisimetrična i nije tranzitivna (jer je $2 \varrho 4$ i $4 \varrho 3$, ali nije $2 \varrho 3$).

4.12. a) Relacija ϱ nije refleksivna. Naime, skup S je neprazan, pa skup $\mathcal{P}(S)$ sadrži bar jedan neprazan skup A kao svoj element, i za njega vrijedi:

$$A \cap A = A \neq \emptyset,$$

pa nije $A \varrho A$.

b) Zaključiti da relacija ϱ nije ni antirefleksivna, posmatrajući $\emptyset \in \mathcal{P}(S)$. Relacija je simetrična, a nije tranzitivna.

4.13. a) Neka je relacija ϱ simetrična. Tada imamo:

$$(x, y) \in \varrho \overset{\text{def}4.4}{\Rightarrow} (y, x) \in \varrho \overset{\text{def}4.10}{\Rightarrow} (x, y) \in \varrho^{-1}. \text{ Zato je } \varrho \subseteq \varrho^{-1}$$

Dalje imamo

$$(x, y) \in \varrho^{-1} \Rightarrow (y, x) \in \varrho \Rightarrow (x, y) \in \varrho,$$

što znači da je $\varrho^{-1} \subseteq \varrho$.

Prema tome je $\varrho^{-1} = \varrho$, čime je dokazano da je navedeni uslov potreban.

b) Neka je ispunjen uslov $\varrho^{-1} = \varrho$, i neka je $(x, y) \in \varrho$. Tada je $(y, x) \in \varrho^{-1}$, a kako je $\varrho^{-1} = \varrho$, to je $(y, x) \in \varrho$. Dakle, ako je $\varrho^{-1} = \varrho$, tada vrijedi implikacija $(x, y) \in \varrho \Rightarrow (y, x) \in \varrho$, tj. relacija ϱ je simetrična. Time je dokazano da je navedeni uslov i dovoljan.

4.14. a) Neka je relacija ϱ u skupu S antisimetrična i neka je $(x, y) \in \varrho \cap \varrho^{-1}$. Tada je $(x, y) \in \varrho$ i $(x, y) \in \varrho^{-1}$, pa je $(y, x) \in \varrho$. Iz osobina da je $(x, y) \in \varrho$ i $(y, x) \in \varrho$ slijedi da je $x = y$, (jer je ϱ antisimetrična relacija), tj. $(x, y) = (x, x) \in D$.

Prema tome, ako je ϱ antisimetrična relacija, tada imamo:

$$(x, y) \in \varrho \cap \varrho^{-1} \Rightarrow (x, y) \in D,$$

pa je

$$\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq D.$$

b) Neka je $\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq D$ i neka je $x \varrho y$ i $x \neq y$. Dokažimo da nije $y \varrho x$. Kada bi bilo $y \varrho x$, slijedilo bi da je $x \varrho^{-1} y$, pa bi bilo

$$(x, y) \in \varrho \cap \varrho^{-1} \Rightarrow (x, y) \in D$$

(jer je $\varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq D$). Ovo je, međutim, u suprotnosti sa pretpostavkom da je $x \neq y$. Znači, nije $y \varrho x$.

Možemo, međutim, raditi ovako:

Neka je $\varrho \cap \varrho^{-1} \subsetneq D$. Ako $x \varrho y$ i $y \varrho x$, tj. ako $(x, y) \in \varrho$ i $(x, y) \in \varrho^{-1}$, tada $(x, y) \in \varrho \cap \varrho^{-1} \subseteq D$, tj. $x = y$. Znači, relacija ϱ je antisimetrična.

4.15. Neka je u skupu S relacija ϱ tranzitivna i neka je

$$x\varrho^{-1}y \text{ i } y\varrho^{-1}z.$$

Tada je $y\varrho x$ i $z\varrho y$, pa kako je relacija ϱ tranzitivna, to imamo:

$$(z\varrho y \wedge y\varrho x) \Rightarrow z\varrho x \Rightarrow x\varrho^{-1}z.$$

Prema tome vrijedi:

$$(x\varrho^{-1}y \wedge y\varrho^{-1}z) \Rightarrow x\varrho^{-1}z,$$

pa je relacija ϱ^{-1} tranzitivna.

4.16. Ova relacija nije relacija ekvivalencije. Da bi to postala, treba je dopuniti uređenim parovima:

(4, 4) (da bi bila refleksivna);
(2, 1), (4, 1) i (5, 6) (da bi bila simetrična);
(2, 4) i (4, 2) (da bi bila tranzitivna).

4.17. a) $\varrho_1 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$;
b) $\varrho_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$;
c) $\varrho_3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

4.18. Osobine refleksivnosti i simetričnosti se lako dokazuju, a evo dokaza osobine tranzitivnosti relacije ϱ:

$$\begin{aligned}(x\varrho y \wedge y\varrho z) &\Rightarrow [2 \mid (x+y) \wedge 2 \mid (y+z)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(x+y = 2k \wedge k \in Z) \wedge (y+z = 2p \wedge p \in Z)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [(x+y)+(y+z) = 2(k+p) \wedge k+p \in Z)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow [x+z = 2(k+p) - y) \wedge (k+p) - y \in Z] \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \mid (x+z) \Rightarrow x\varrho z.\end{aligned}$$

4.19. a) Ovdje ćemo dokazati samo osobinu tranzitivnosti:

$$\begin{aligned}&[(a, b)\varrho(c, d) \wedge (c, d)\varrho(e, f)] \Rightarrow (a+d = b+c \wedge c+f = d+e) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a+d+c+f = b+c+d+e \Rightarrow a+f = b+e \Rightarrow (a, b)\varrho(e, f).\end{aligned}$$

Postupak u slučaju b) sličan je prethodnom.

4.20. *Uputa*: pri dokazivanju osobine tranzitivnosti relacije $\parallel$ treba primijeniti indirektni način dokazivanja, pozivajući se na aksiomu paralelnosti pravih (datom tačkom prolazi tačno jedna prava paralelna datoj pravoj).

4.21. a) $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$;
b) $\varrho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$;
c) $\varrho = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Kada bi iz osobina refleksivnosti i simetričnosti logički slijedila osobina tranzitivnosti relacije, morala bi relacija ϱ navedena u slučaju a) biti tranzitivna, a ona to nije. Dakle, tranzitivnost neke relacije nije posljedica njene refleksivnosti i simetričnosti. Slično vrijedi i u ostala dva slučaja.

4.22. Postoji više mogućnosti isključivanja, a jedna od njih je da se isključe parovi (a, b) i (a, c).

4.23. Osobine refleksivnosti i antisimetričnosti dokazuju se lako, pa ovdje dokažimo samo osobinu tranzitivnosti relacije ϱ.

Neka je $A\varrho B$ i $B\varrho C$. Tada, po definiciji posmatrane relacije ϱ, slijedi da je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, pa vrijedi:

$$x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C, \text{ tj.}$$

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C,$$

pa je relacija ϱ tranzitivna.

Pošto je relacija ϱ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, ona je relacija uređaja na skupu S.

Ako skup S ima bar dva elementa, recimo a i b, tada nije $\{a\} \subseteq \{b\}$ niti je $\{b\} \subseteq \{a\}$, pa su skupovi $\{a\}$ i $\{b\}$ neuporedivi u odnosu na relaciju $\subseteq$. Znači, relacija ϱ nije relacija potpunog uređaja.

4.24. Dokažimo ovdje osobinu antisimetričnosti relacije $|$. Ako vrijedi $x \mid y$ i $y \mid x$, tada je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ (jer iz jednakosti $y = kx, k \in N$, slijedi da je $y \leqslant x$, a odatle slijedi da je $x = y$. Relacija $|$ je, dakle, antisimetrična.

Uređaj nije potpun, jer, na primjer, elementi 2 i 3 nisu uporedivi (niti $2 \mid 3$, niti $3 \mid 2$).

4.25. Maksimalni lanci su:

$$A_1 = \{1, 3, 4\},\ A_2 = \{2, 3, 4\},\ A_3 = \{5, 6\}.$$

4.26. Pošto je ϱ antirefleksivna relacija, to ni za koje x iz skupa u kome je data relacija ϱ nije $x \varrho x$. Ako je relacija i tranzitivna, tada

$$(\exists x, y)\,(x \varrho y \wedge y \varrho x) \Rightarrow (\exists x)\, x \varrho x$$

(zbog tranzitivnosti), što nije moguće, jer je ϱ antirefleksivna relacija. Dakle, ϱ je antisimetrična relacija.

4.27. Tačnost tvrdnje slijedi iz činjenice da iskaz

$$(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q)$$

predstavlja tautologiju. Naime, kao iskaze $x \varrho y$, $y \varrho x$ i $x = y$ označimo, redom, sa p, q i r, tada iskaz (1) postaje $p \wedge q \Rightarrow r$, a iskaz (2) postaje $p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$, što znači da je

$$(1) \Leftrightarrow (2).$$

5. OSNOVNI POJMOVI KOD FUNKCIJA. EKVIPOTENTNI SKUPOVI

5.1. OSNOVNI POJMOVI KOD FUNKCIJA

5.1. Relacija ϱ_1 nije funkcija, jer se elementu $1 \in A$ pridružuju dva različita elementa $a, b \in B$. Relacija ϱ_2 nije funkcija, jer element 4 nema svoju sliku. Relacija ϱ_3 je funkcija, jer za nju vrijedi definicija 5.1.

5.2. Relacija g nije funkcija, jer sadrži, na primjer, parove $(4, 2)$ i $(4, -2)$ jednakih prvih a različitih drugih komponenti.

5.3. Funkcija f_1 nije ni injektivna, jer je element $b \in B$ slika dva različita originala $2, 3 \in A$, niti je sirjektivna, jer elementi $c, d \in B$ nisu slike nijednog elementa iz skupa A. Funkcija f_2 je injektivna a nije sirjektivna, funkcija f_3 je sirjektivna a nije injektivna, a funkcija f_4 je bijektivna.

5.4. Funkcija f nije sirjektivna, jer broj 1 nije slika nijednog broja $n \in N$. Funkcija g je sirjektivna, jer je svaki broj $y \in R$ slika jednog broja $x \in R$ koji je određen jednakošću $x = y - 1$.

5.5. Funkcija f je, prema definiciji 5.3, injektivna, jer vrijedi:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1^2 + 1 = 2x_2^2 + 1 \Rightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

za sve vrijednosti $x_1, x_2 \in N$.

Posljednja implikacija, međutim, ne vrijedi u skupu R (već vrijedi: $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2)$), pa zato funkcija g nije injektivna. Ili, razmišljajmo ovako:

ako je $x \neq 0$, tada je $x \neq -x$, ali je $g(-x) = 2 \cdot (-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = g(x)$, pa nije zadovoljena definicija 5.3.

5.6. Takva je, na primjer, funkcija

$$f: N \to N, \quad f(n) = (n-2)^2 + 1,$$

za koju je $f(1) = 2 = f(3)$.

5.7. a) Funkcija f nije injektivna jer je, na primjer,

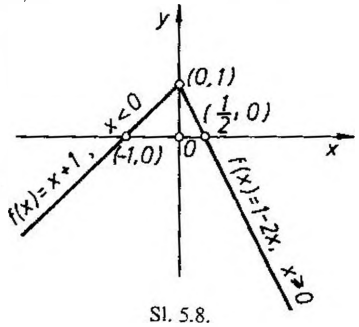
$$f(-1) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

b) Funkcija f nije ni sirjektivna, jer je, na primjer, $f(x) \neq 2$ za svaki $x \in R$. Naime vrijedi:

$$x < 0 \Rightarrow x + 1 < 1,$$
$$x \geqslant 0 \Rightarrow -2x \leqslant 0 \Rightarrow 1 - 2x \leqslant 1.$$

Dakle, $f(x) \leqslant 1$ za svaki $x \in R$.

Ova je funkcija prikazana na slici 5.8.



Sl. 5.8.

5.8. a) $n \neq 0$.

b) Za $n^2 \geqslant 1$ je $f\left(\frac{2mn}{n^2+1}\right) = n$, a za $n^2 < 1$ je $f\left(\frac{2mn}{n^2+1}\right) = \frac{1}{n}$.

5.9. Definiciono područje je $|x| \geq 1$.

Pošto je $a > 0$, to je i $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) > 0$, pa još treba ispitati da li je $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+1}{\sqrt{a}} \geq 1$. Posljednja se nejednakost, međutim, svodi na ekvivalentnu nejednakost $(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0$ koja je tačna. Znači, posmatrana vrijednost x pripada domeni funkcije.

Za vrijednost funkcije f dobije se:

$f(x) = \frac{a-1}{2}$ ako je $a \geq 1$, a $f(x) = \frac{1-a}{2a}$ ako je $0 < a < 1$.

5.10. Funkcije f i g nisu jednake, jer im domene nisu jednake.

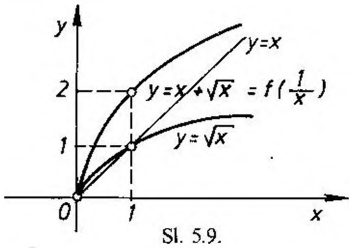
5.11. Ako stavimo da je $2x - 3 = u$, tada je $x = \frac{u+3}{2}$, pa ako ove dvije vrijednosti uvrstimo u formulu $f(2x-3) = 4x + 2$, dobijemo da je $f(u) = 2u + 8$. Ako sada u posljednjoj jednakosti, umjesto u stavimo x, dobijemo da je

$$f(x) = 2x + 8.$$

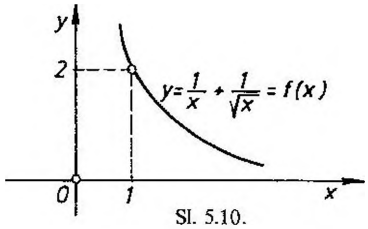
5.12. a) Stavimo li $\frac{1}{x} = u$, tada je $x = \frac{1}{u}$, pa je $f(u) = \frac{1}{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}$. Kada ovdje, umjesto u stavimo x, dobijemo da je

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b) Domena obje funkcije je $D = (0, +\infty)$. Grafik funkcije $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ se dobije iz grafika funkcija $y = x$ i $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$ (sl. 5.9.). Grafik funkcije $y = f(x)$ se dobije iz grafika funkcija $y = \frac{1}{x}$ i $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (sl. 5.10).



Sl. 5.9.



Sl. 5.10.

5.13. Očito je da su zadovoljeni uslovi postojanja funkcija $h \circ g$, $(h \circ g) \circ f$, $g \circ f$ i $h \circ (g \circ f)$, pa, na osnovu definicije 5.6. slaganja funkcija, imamo:

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)[f(x)] = h\{g[f(x)]\}, \; x \in S,$$
$$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h\{g[f(x)]\}, \; x \in S.$$

Pošto su domene S i kodomene S_3 funkcija $(h \circ g) \circ f$ i $h \circ (g \circ f)$ iste i pošto je, prema gornjim jednakostima, za svaki $x \in S$

$$[(h \circ g) \circ f](x) = [h \circ (g \circ f)](x),$$

te su funkcije (po definiciji 5.8.) jednake.

5.14. a) Za proizvoljne elemente $x_1, x_2 \in A$ vrijedi:
$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (jer je g injektivna funkcija) $\Rightarrow x_1 = x_2$ (jer je f injektivna funkcija).

Kako, dakle, vrijedi implikacija

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

funkcija $g \circ f$ je injektivna.

b) Neka je $z \in C$ proizvoljno uzet element. Pošto je g sirjektivna funkcija, postoji $y \in B$ tako da je $g(y) = z$. Pošto je i f sirjektivna funkcija, postoji element $x \in A$ tako da je $f(x) = y$. Prema tome, postoji $x \in A$ tako da je

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y) = z.$$

Funkcija $g \circ f$ je, dakle, sirjektivna.

c) Ova tvrdnja slijedi iz a) i b).

5.15. Funkcija f preslikava skup R na R (sl. 5.11), a pošto je R domena funkcije g, to postoji složena funkcija $g \circ f$.

U intervalu $(-\infty, 1)$ je $f(x) < 0$, pa u tome intervalu važi

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f(x) + 1 = (x - 1) + 1 = x.$$

U intervalu $[1, 2]$ je $f(x) \geqslant 0$, pa u tome intervalu imamo:

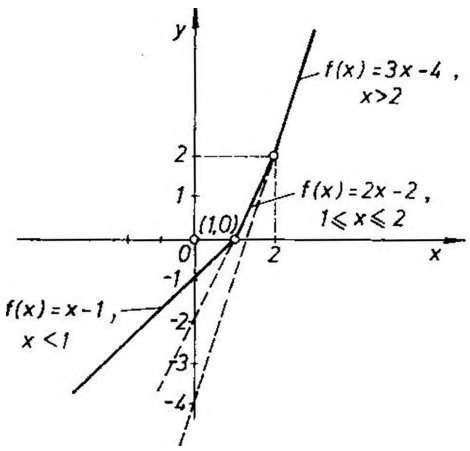
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 2f(x) + 1 = \ldots = 4x - 3,$$

a u intervalu $(2, +\infty)$ dobijemo da je

$$(g \circ f)(x) = 6x - 7.$$

Prema tome, za složenu funkciju imamo:

$$g \circ f : R \to R,\ (g \circ f)(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ 4x - 3, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 6x - 7, & x > 2. \end{cases}$$



Sl. 5.11.

5.16. Pokazati da je $f[g(x)] = 3ax + 7$, $g[f(x)] = 3ax - 2a + 3$, pa je jasno da vrijedi ekvivalencija

$$(\forall x \in R) f[g(x)] = g[f(x)] \Leftrightarrow a = -2.$$

5.17. a) Funkcija f je injektivna, jer vrijedi:

$$(\forall x_1, x_2 \in R)\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3.$$

Funkcija je i sirjektivna, jer vrijedi:

$$(\forall y \in R)(\exists x \in R)\, y = 2x + 3,$$

i taj se x određuje iz jednakosti $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$.

Kako je funkcija f injektivna i sirjektivna, ona je bijektivna, pa postoji njoj inverzna funkcija f^{-1}.

b) Odredimo formulu inverzne funkcije.

Prvi način. Jednakosti $y = 2x + 3$ ekvivalentna je jednakost $x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$. Ako u ovoj jednakosti zamijenimo uloge varijabli x i y, dobijemo formulu inverzne funkcije

$$f^{-1} : R \to R,\ f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

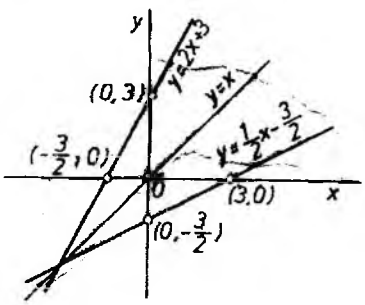
Drugi način. Pošto je $D(f) = I_m(f)$, to je

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i_R{}^{1)}, \text{ tj. } (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Zato imamo:

$$f[f^{-1}(x)] = x \Leftrightarrow 2 \cdot f^{-1}(x) + 3 = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

c) Pošto je formula $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ inverzne funkcije f^{-1} nastala zamjenom uloga varijabli x i y u formuli $y = 2x + 3$ funkcije f, grafici funkcija f i f^{-1} simetrični su prema simetrali $y = x$ prvog i trećeg kvadranta koordinatne ravni (sl. 5.12).



Sl. 5.12.

5.18. Vidjeti prethodni zadatak. Formula inverzne funkcije je

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2}.$$

---

[1] Ovo neposredno slijedi iz definicije 5.7. inverzne funkcije, jer je $A = B(= R)$, kao i jednakost $f^{-1} \circ f = i_R$.

5.19. Za sve vrijednosti $x_1, x_2 \in R \setminus \{3\}$ vrijedi:

$\frac{2+x_1}{3-x_1} = \frac{2+x_2}{3-x_2} \Rightarrow (2+x_1)(3-x_2) = (2+x_2)(3-x_1) \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_1 = x_2$. Znači, funkcija f je injektivna.

Kako je $x \neq 3$, jednakost $\frac{2+x}{3-x} = y$ je ekvivalentna formuli $x(1+y) = 3y - 2$, a kako je $y \neq -1$, ova je formula ekvivalentna formuli $x = \frac{3y-2}{y+1}$. Dakle, za proizvoljan $y \in R \setminus \{-1\}$ postoji $x \in R \setminus \{3\}$ tako da je $f(x) = y$, i taj x je određen jednakošću $x = \frac{3y-2}{y+1}$. Time je dokazana i sirjektivnost funkcije f.

Kako je funkcija f bijektivna, postoji njoj inverzna funkcija

$$f^{-1}: R \setminus \{-1\} \to R \setminus \{3\}, f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x+1}.$$

5.20. Neka je $(2x_1 + y_1 - 3, x_1 + y_1 + 1) = (2x_2 + y_2 - 3, x_2 + y_2 + 1)$. Odatle, na osnovu definicije jednakosti uređenih parova, slijedi sistem jednakosti

$$2x_1 + y_1 - 3 = 2x_2 + y_2 - 3 \wedge x_1 + y_1 + 1 = x_2 + y_2 + 1,$$

odakle se dobije da je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Zato je

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2),$$

što znači da je funkcija injektivna.

Da bi se dokazala sirjektivnost funkcije f, treba dokazati da za proizvoljan par $(u, v) \in R \times R$ postoji par $(x, y) \in R \times R$ tako da je

$$(2x + y - 3, x + y + 1) = (u, v).$$

Iz ove se jednakosti dobije da je

$$x = u - v + 4, \quad y = 2v - u - 5.$$

Zato vrijedi:

$$f: (u - v + 4, 2v - u - 5) \mapsto (u, v).$$

Za inverznu funkciju vrijedi:

$$f^{-1}: (x, y) \mapsto (x - y + 4, -x + 2y - 5).$$

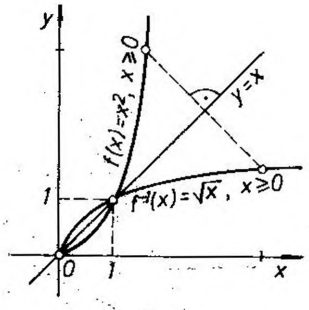
5.21. Funkcija f je, očito, bijektivna, pa postoji njoj inverzna funkcija f^{-1} čiju formulu dobijemo ovako:

$$f(x) = y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}, \text{ dakle, } f^{-1}(x) = y = \sqrt{x}.$$

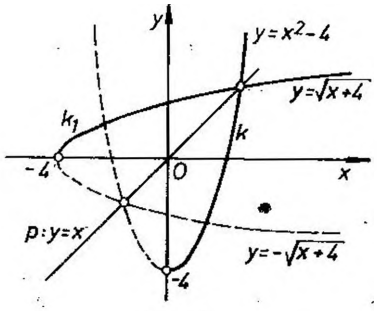
Prema tome, za inverznu funkciju imamo:

$$f^{-1}: R^+ \cup \{0\} \to R^+ \cup \{0\}, f^{-1}(x) = \sqrt{x},$$

što je prikazano na slici 5.13.



Sl. 5.13.



Sl. 5.14.

5.22. a) Pošto je $f(x)_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -4$, lako se vidi da je $I_m(f) = [-4, +\infty)$.

b) Krivoj k_1 (sl. 5.14.) ne odgovara nikakva funkcija, jer za svaku vrijednost $x \in (-4, +\infty)$ postoje dvije ordinate:

$$y = \sqrt{x+4} \text{ i } y = -\sqrt{x+4}.$$

c) Funkcija f nije bijektivna. Najveći dijelovi krive k kojima odgovaraju bijekcije g i h su dijelovi te krive s obje strane ose y. Te bijekcije su:

$$g: [0, +\infty) \to [-4, +\infty),\ g(x) = x^2 - 4,$$
$$h: (-\infty, 0] \to [-4, +\infty),\ h(x) = x^2 - 4.$$

Inverzne funkcije funkcija g i h su:

$$g^{-1}: [-4, +\infty) \to [0, +\infty),\ g^{-1}(x) = \sqrt{x+4},$$
$$h^{-1}: [-4, +\infty) \to [0, -\infty),\ h^{-1}(x) = -\sqrt{x+4}.$$

5.23. Funkcije u a) i c) su neparne, funkcija u b) je parna, a funkcija u d) nije ni parna ni neparna.

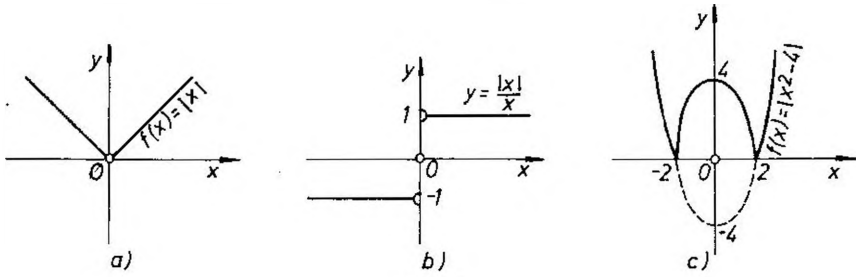
5.24. a) $D(f) = R$. $I_m(f) = R^+ \cup \{0\}$, funkcija nije bijektivna (jer nije injektivna; ako je posmatramo kao funkciju $f: R \to R$ ona nije ni sirjektivna), a parna je (sl. 5.15.a).

Dakle je
$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f(|x|) = ||x|| = |x| = f(x).$$
$$f \circ f = f.$$

b) $D(f) = R \setminus \{0\}$. $I_m(f) = \{-1, 1\}$ (sl. 5.15. b)). Funkcija nije bijektivna, a neparna je. Pokazuje se da je $(f \circ f)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

c) $D(f) = R$, $I_m(f) = R^+ \cup \{0\}$ (Sl. c)). Funkcija nije bijektivna, a parna je. Pokazuje se da je $(f \circ f)(x) = |[f(x)]^2 - 4| = |x^4 - 8x^2 + 12|$.

Napominjemo da složena funkcija $f \circ f$ postoji zato što je u sva tri slučaja $I_m(f) \subseteq R$.

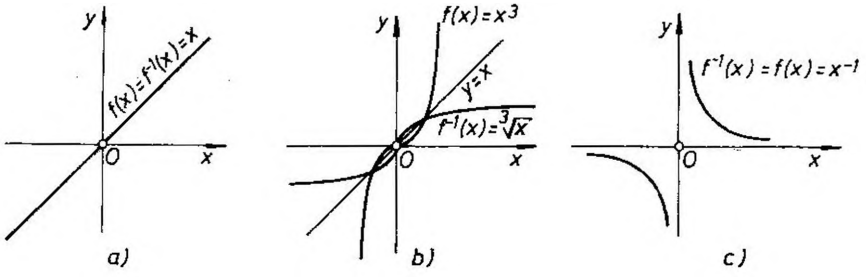


Sl. 5.15.

5.25. a) $D(f) = I_m(f) = R$. Funkcija je neparna i bijektivna i jednaka je svojoj inverznoj funkciji (sl. 5.16. a)).

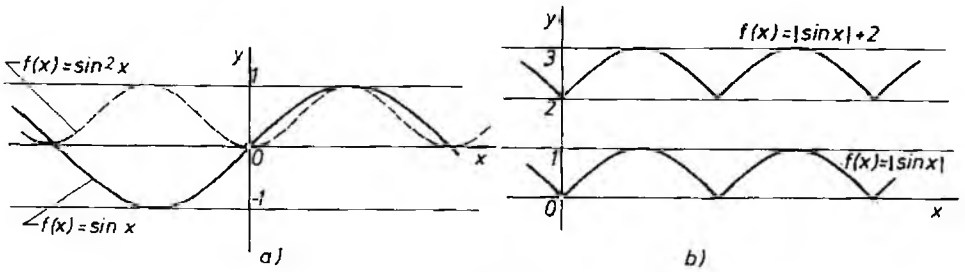
b) $D(f) = I_m(f) = R$. Funkcija je neparna i bijektivna, a formula inverzne funkcije je
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in R.$$
Grafik funkcija f i f^{-1} dat je na slici b).

c) $D(f) = I_m(f) = R \setminus \{0\}$. Funkcija je neparna i bijektivna i jednaka je inverznoj funkciji. Njen grafik (sl. c)) zove se *jednakostrana hiperbola*). Tako se zove i grafik funkcije $f(x) = \dfrac{c}{x}$ $(c > 0)$.



Sl. 5.16.

5.26. a) $D(f) = R$, $I_m(f) = [-1, 1]$, funkcija nije bijektivna, a neparna je (sl. 5.17. a)).
b) $D(f) = R$, $I_m(f) = [0,1]$, funkcija je parna, a nije bijektivna (sl. b)).
c) Za funkciju $f(x) = \sin^2 x$ vrijedi ono što i za funkciju $f(x) = |\sin x|$ (sl. a)).
d) $D(f) = R$, $I_m(f) = [2, 3]$, funkcija je parna a nije bijektivna (sl. b)).



Sl. 5.17.

5.27. $1^0\ f(A) = \{f(x) : f(x) = y = \dfrac{x-2}{2x+1} \wedge 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

Formula $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ je u intervalu $[1, 2]$ ekvivalentna formuli $x = \dfrac{2+y}{1-2y}$, pa imamo:

$$f(A) = \left\{y \in R : 1 \leqslant \frac{2+y}{1-2y} \leqslant 2\right\} = \ldots = \left[-\frac{1}{3}, 0\right].$$

Prema tome je

$$f(A) = \left[-\frac{1}{3}, 0\right].$$

$$2^0\ f^{-1}(A) = \{x \in R : f(x) \in A\} = \left\{x \in R : 1 \leqslant \frac{x-2}{2x+1} \leqslant 2\right\} = \left[-3, -\frac{4}{3}\right].$$

5.28. *Uputa*: Dokazati da je funkcija f injektivna i da je $f(A) = A$.

5.29. a) $f(A \cup B) = \{y \in F : y = f(x) \wedge x \in A \cup B\} = \ldots =$
$= \{y \in F : (y = f(x) \wedge x \in A) \vee (y = f(x) \wedge x \in B)\} =$
$= \{y \in F : y = f(x) \wedge x \in A\} \cup \{y \in F : y = f(x) \wedge x \in B\} = f(A) \cup f(B)$.

Formule b) i c) dokazuju se slično. Ako funkcija $f : E \to F$ nije injektivna, tada postoje $a, b \in E$ tako da je $a \neq b$ i $f(a) = f(b)$. Za $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ je $f(A \cap B) = \emptyset \subset f(A) \cap f(B) = \{f(a)\}$;
$f(A \setminus B) = \{f(a)\} \supset f(A) \setminus f(B) = \emptyset$.

5.30. a) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$.

Dakle, vrijedi formula

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)).$$

b) $y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow (y = f(x) \wedge x \in f^{-1}(B)) \Rightarrow$
$\Rightarrow (y = f(x) \wedge f(x) \in B) \Rightarrow y \in B$.

Vrijedi, dakle, formula

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

5.31.* *Rješenje*. a) Neka je $f : E \to F$ bilo kakva funkcija, i neka postoji funkcija $g : F \to E$ tako da je $g \circ f = i_E$. Dokažimo da je funkcija f injektivna. Imamo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i_E(x_1) = i_E(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(jer je i_E injektivna funkcija). Zaista je, dakle, f injektivna funkcija.

Obrnuto, neka je f injektivna funkcija. Tada je funkcija $\bar{f} : E \to f(E)$, za koju je $\bar{f}(x) = f(x)$ $(x \in E)$ ne samo injektivna, nego i sirjektivna, pa je bijektivna. Zato postoji funkcija $\bar{f}^{-1} : f(E) \to E$. Definišimo funkciju g na sljedeći način:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), \text{ za } y \in f(E) \\ \text{bilo koji } x \in E, \text{ za } y \in F \setminus f(E). \end{cases}$$

Sada za proizvoljan $x \in E$ imamo:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[f(x)] = x.$$

što znači da je

$$g \circ f = i_E.$$

Time je tvrdnja a) dokazana.

b) Neka je $f: E \to F$ bilo kakva funkcija, i neka postoji funkcija $g: F \to E$ takva da je $f \circ g = i_F$. Dokažimo da je f sirjektivna funkcija. Za proizvoljno $y \in F$ imamo:

$$y = i_F(y) = (f \circ g)(y) = f[g(y)] = f(x),$$

gdje je $x = g(y)$. Kako, dakle, postoji $x \in E$ tako da je $y = f(x)$, to je f sirjektivna funkcija.

Obrnuto, neka je f sirjektivna funkcija. Tada je, za svako $y \in F$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, tj. postoji bar jedan $x \in E$ tako da je $y = f(x)$. U svakom skupu $f^{-1}(\{y\})$ izaberimo [11] tačno po jedan x i stavimo $g(y) = x$. Tada je $g: F \to E$ funkcija, i vrijedi:

$$(f \circ g)(y) = f[g(y)] = f(x) = y \Rightarrow f \circ g = i_F$$

(jednakost $f(x) = y$ vrijedi zato što je $x \in f^{-1}(\{y\})$). Time je dokazano i obrnuto, pa vrijedi i tvrdnja b).

5.32. *Rješenje.* a) Neka je $g: F \to E$ inverzna funkcija bijektivne funkcije f. Tada, po definiciji inverzne funkcije, vrijedi:

$$(\forall\, x \in E)\, g[f(x)] = x, \text{ tj. } g \circ f = i_E,$$
$$(\forall\, y \in F) f[g(y)] = y, \text{ tj. } f \circ g = i_F.$$

b) Neka sada za funkcije $f: E \to F$ i $g: F \to E$ vrijedi:

$$g \circ f = i_E \text{ i } f \circ g = i_F.$$

Pošto je funkcija f bijektivna (v. zad. 5.31), postoji njena inverzna funkcija f^{-1} takva da je $f^{-1} \circ f = i_E$ i $f \circ f^{-1} = i_F$. Odatle, i iz jednakosti $f \circ g = i_F$ i $f^{-1} \circ f = i_E$ imamo:

$$f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ i_F \Rightarrow (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i_E \circ g = f^{-1} \Rightarrow g = f^{-1}.$$

Prema tome je $g = f^{-1}$, tj. g je inverzna funkcija funkcije f.

5.33. Prema prethodnom zadatku dovoljno je dokazati da vrijedi:

(1) $\quad (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = i_E$,

(2) $\quad (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = i_G$.

Zaista, za formulu (1) imamo:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ (g \circ f)) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f) = f^{-1} \circ (i_F \circ f) = f^{-1} \circ f = i_E.$$

Slično se dokazuje i formula (2).

5.2. EKVIPOTENTNI SKUPOVI

5.34. *Uputa*: za dokaz osobine $A \sim A$ iskoristiti postojanje preslikavanja i_A, a za dokaz simetričnosti relacije $\sim$ inverznu funkciju. Pri dokazivanju osobine tranzitivnosti posmatrati složeno preslikavanje i vidjeti zadatak 5.14.

5.35. Posmatrati funkciju

$$f: N \to 2N, \quad f(n) = 2n \ (n \in N),$$

gdje je $2N$ oznaka svih parnih prirodnih brojeva, i utvrditi da je to bijekcija skupa N na $2N \subset N$ (definicija 5.10. i 5.11).

5.36. Evo jedne funkcije koja uspostavlja bijekciju skupa N na skup Z:

$$f(1) = 0, \quad f(2n) = n, \quad f(2n+1) = -n \quad (n \in N).$$

Obrazložiti.

[11] Ovaj izbor je moguć na osnovu takozvanog Zermelovog aksioma izbora.

5.37. *Rješenje.* Jednu bijekciju skupa N na skup $N \times N$ možemo formirati ako članove skupa $N \times N$ napišemo u obliku sljedeće šeme:

$$\begin{array}{ccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4),\ldots \\ \downarrow\nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4),\ldots \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4),\ldots \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4),\ldots. \\ \ldots & & & \end{array}$$

Stavljajući da je $f(1) = (1,1), f(2) = (2,1), f(3) = (1,2), f(4) = (3,1), f(5) = (2,2), f(6) = (1,3), f(7) = (4,1)$ itd., slijedeći nacrtane strelice, dobijemo bijekciju $f: N \to N \times N$, pa je

$$N \sim N \times N.^{1)}$$

5.38. *Uputa*: poredati racionalne brojeve u niz slično kao u šemi u prethodnom zadatku:

$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 4, -4, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 5, -5, \ldots$ onako kao što raste zbir apsolutnih vrijednosti brojnika i nazivnika dotičnog razlomka.

5.39. *Uputa*: Primjer bijektivne funkcije između ovih skupova je funkcija data formulom

$$f(x) = 2^x \quad (x \in R).$$

5.40. Za duži $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ na slikama 5.18. a) i b) postoji tačka O tako da centralno projiciranje f iz tačke O preslikava bijektivno duž $\overline{AB}$ na duž $\overline{A'B'}$, pa imamo:

$$f: \overline{AB} \overset{1-1}{\to} \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{A'B'}.$$

Ako to nije moguće, kao na slikama c) i d), tada postoji duž $\overline{A_1B_1}$ i tačka O_1 i centralna projekcija f_1 tako da važi:

(1) $$f_1: \overline{AB} \overset{1-1}{\to} \overline{A_1B_1} \Rightarrow \overline{AB} \sim \overline{A_1B_1},$$

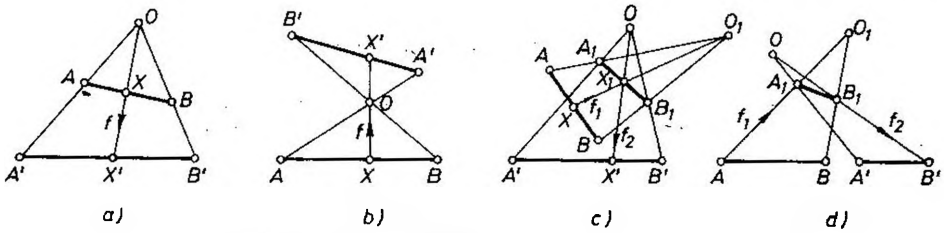
kao i tačka O tako da imamo centralnu projekciju f_2 za koju važi:

(2) $$f_2: \overline{A_1B_1} \overset{1-1}{\to} \overline{A'B'} \Rightarrow \overline{A_1B_1} \sim \overline{A'B'}.$$

Kako je relacija $\sim$ tranzitivna, iz (1) i (2) slijedi da je

$$\overline{AB} \sim \overline{A'B'}.$$

Prema tome, svake dvije duži u ravni su ekvipotentni skupovi tačaka.

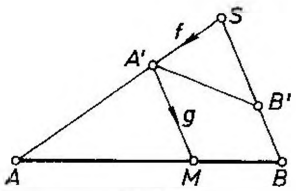


Sl. 5.18.

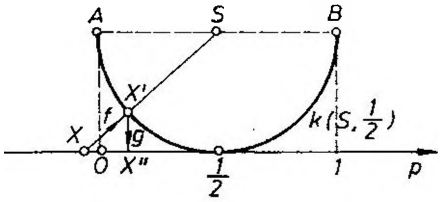
5.41. a) Neka je data proizvoljna nenulta duž $\overline{AB}$ (sl. 5.19). Uvijek se može odabrati duž $\overline{A'B'}$ kao na slici, tako da postoji centralna projekcija f duži $\overline{A'B'}$ na duž $\overline{AB}$ iz tačke S, kao i paralelna projekcija duži $\overline{A'B'}$ u pravcu prave BB' na duž $\overline{MB} \subseteq \overline{AB}$. Dovršiti zaključivanje.

[1)] Preciznije opisivanje preslikavanja f može se vidjeti, na primjer, u knjizi S. Mardešić: Matematička analiza, Prvi dio, strana 21.

b) Izvesti zaključak i na osnovu rezultata u prethodnom zadatku.



Sl. 5.19.



Sl. 5.20.

5.42. *Uputa*: za zadatak a) vidjeti primjer 5.2, a kod zadatka b) povući tangente kružnice u krajnjim tačkama posmatranog luka.

5.43*. *Uputa*: posmatrati polukružnicu $k\left(S, \frac{1}{2}\right)$ bez tačaka A i B koja je smještena kao na slici 5.20. Zatim posmatrati centralnu projekciju f brojevne prave p na polukružnicu k iz tačke S, i normalnu projekciju g polukružnice k na pravu p.

6. O ALGEBARSKIM STRUKTURAMA

6.1. *Rješenje*: a) Da; b) Ne; c) Da; d) Da; e) Ne; f) Ne, jer $1 \cdot 0 \in Q$; g) Da; h) Ne, jer je zbir neparnih brojeva paran; i) Da, jer je proizvod neparnih brojeva neparan broj.

6.2. *Rješenje*: Imamo $(p_2 \circ p_1)(1) = p_2(p_1(1)) = p_2(1) = 2$, $(p_2 \circ p_1)(2) = p_2(p_1(2)) = p_2(2) = 3$, $(p_2 \circ p_1)(3) = (p_2(p_1(3)) = p_2(3) = 1$. Dakle,

$$p_2 \circ p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = p_2, \text{ što kraće pišemo}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Slično je $p_1 \circ p_2 = p_2$, $p_1 \circ p_3 = p_3$, $p_3 \circ p_1 = p_3$, $p_2 \circ p_3 = p_1$, $p_3 \circ p_2 = p_1$, $p_1 \circ p_1 = p_1$, $p_2 \circ p_2 = p_3$, $p_3 \circ p_3 = p_2$.

Dakle, skup $\{p_1, p_2, p_3\}$ je zatvoren u odnosu na operaciju $\circ$, pa je $(\{p_1, p_2, p_3\}, \circ)$ grupoid. Skup $\{p_1, p_3, p_4\}$ nije grupoid, jer vrijedi:

$$p_4 \circ p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \notin \{p_1, p_3, p_4\}.$$

6.3. a) $(Z, +)$ je grupa; b) $(Z, \cdot)$ je polugrupa ali nije grupa, jer, npr., broj 2 nema inverznog elementa; c) $(Q, +)$ je grupa; d) $(Q, \cdot)$ je polugrupa ali nije grupa, jer broj 0 nema inverznog elementa; e) $(Q \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa; f) $(Q^+, \cdot)$ je grupa; g) $(Q^+, :)$ nije grupa (ni polugrupa), jer operacija dijeljenja nije asocijativna.

6.4. *Rješenje*: S je zatvoren u odnosu na operaciju $\cdot$, jer vrijedi:

$$\frac{1+2m}{1+2n} \cdot \frac{1+2p}{1+2q} = \frac{1+2(m+p+2mp)}{1+2(n+q+2nq)}$$

i jer je $m + p + 2mp \in Z$, $n + q + 2nq \in Z$, čim su $m, n, p, q \in Z$.

Operacija $\cdot$ je komutativna i asocijativna.

Neutralni element množenja je broj 1, a broj 1 je iz S, jer je $1 = \frac{1+2\cdot 0}{1+2\cdot 0} \in S$.

Svaki element iz S ima inverzni element u odnosu na operaciju $\cdot$, jer je

$$\frac{1+2m}{1+2n} \cdot \frac{1+2n}{1+2m} = 1,$$

i jer je $\frac{1+2n}{1+2m} \in S$, zbog $m, n \in Z$.

6.5. Sabiranje polinoma $ax + b$ i $a_1x + b_1$ definišemo ovako:

$$(ax + b) + (a_1x + b_1) = (a + a_1)x + (b + b_1).$$

1° Skup P je zatvoren u odnosu na operaciju sabiranja;

2° komutacija i asocijacija slijede iz istih osobina za sabiranje u skupu R;

3° neutralni element je nula-polinom $0 \cdot x + 0$;

4° inverzni element polinoma $ax + b$ je polinom $-ax - b$.

6.6. *Uputa*: Kompozicija bijekcija je bijekcija (zadatak 5.14). Identično preslikavanje je bijekcija. Inverzna funkcija bijektivne funkcije je bijektivna funkcija (preslikavanje).

6.8. *Uputa*: Ako je $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ i $g(x) = \dfrac{px+q}{rx+s}$, onda je

$$(f \circ g)(x) = \frac{(ap+br)x + (aq+bs)}{(cp+dr)x + (cq+ds)}.$$

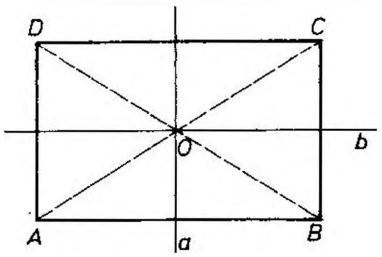
Pokazati da je $(ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = (ad-bc)(ps-qr) = 1 \cdot 1 = 1$, a odatle slijedi da je $(S, \circ)$ grupoid. Neutralni element je funkcija data izrazom $f(x) = \dfrac{1 \cdot x + 0}{0 \cdot x + 1}$, a inverzni element funkcije date izrazom $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ se dobije kao inverzna funkcija f^{-1} funkcije f.

6.9. Prema slici 6.2. vidimo da je $S = \{i, s_a, s_b, s_o\}$, gdje je i identično preslikavanje pravougaonika, s_a i s_b osne i s_o centralna simetrija. Rezultati slaganja dva proizvoljna elementa $x, y \in S$ upisani su u tabelu,[1] i vidi se da je skup S zatvoren. Tako, npr., imamo:

$$(s_b \circ s_a)(A) \overset{\text{def}}{=} s_b[s_a(A)] = s_b(B) = C = s_o(A), \text{ itd.}$$

Slijedi da je $(s_b \circ s_a) = s_o$.

$\circ$	i	s_a	s_b	s_o
i	i	s_a	s_b	s_o
s_a	s_a	i	s_o	s_b
s_b	s_b	s_o	i	s_a
s_o	s_o	s_b	s_a	i



Sl. 6.2.

Asocijativnost slaganja izometrija (kao i preslikavanje uopšte) vrijedi, a komutacija je vidljiva iz tabele. Neutralni element je i, a inverzni se čita iz tabele. Tako je, npr., $s_b^{-1} = s_b$, jer je $s_b \circ s_b = i$.

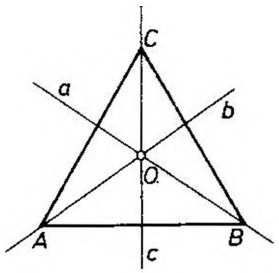
Operacija $\circ$ je komutativna, jer se iz tabele vidi da je $g \circ f = f \circ g$ za svako $f, g \in S$.

Prema tome, imamo komutativnu grupu.

6.10.* Skup S sadrži ovih 6 elemenata: osne simetrije s_a, s_b i s_c, identičko preslikavanje i, te dvije rotacije: r_1 za ugao od $\dfrac{2}{3}\pi$ i r_2 za ugao $-\dfrac{2}{3}\pi$ (sl. 6.3.).

Zaključak da je $(S, \circ)$ (nekomutativna) grupa slijedi ako se posmatra tabela rezultata slaganja preslikavanja:

$\circ$	i	s_a	s_b	s_c	r_1	r_2
i	i	s_a	s_b	s_c	r_1	r_2
s_a	s_a	i	r_1	r_2	s_b	s_c
s_b	s_b	r_2	i	r_1	s_c	s_a
s_c	s_c	r_1	r_2	i	s_a	s_b
r_1	r_1	s_c	s_a	s_b	r_2	i
r_2	r_2	s_b	s_c	s_a	i	r_1



Sl. 6.3.

Neutralni element je identičko preslikavanje i, a inverzni element za, npr., r_2 je r_1 (jer je $r_2 \circ r_1 = i = r_1 \circ r_2$).

6.11. *Rješenje*: Komutativnost, asocijativnost i distributivnost slijede iz odgovarajućih osobina u skupovima Z i Q. Zatvorenost u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$ imamo na osnovu relacija

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{2},$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}.$$

[1] Prvi faktor f u slogu $f \circ g$ uzima se iz prve kolone (stupca), a drugi faktor g iz prve vrste (retka) te tabele.

jer ako su $a, b, c, d, \in Z$, to je $a + c \in Z$, $b + d \in Z$, $ac + 2bd \in Z$. $ad + bc \in Z$, i analogno za skup Q. Neutralni element za sabiranje u oba slučaja je $0 + 0 \cdot \sqrt{2} \in S$ (jer $0 \in Z$ i $0 \in Q$). Suprotni element za $a + b\sqrt{2}$ je element $(-a) + (-b)\sqrt{2}$ koji je u oba slučaja u S. Neutralni element za množenje je $1 + 0 \cdot \sqrt{2} \in S$. Inverzni element za množenje postoji samo u slučaju b) i za broj $a + b\sqrt{2} \neq 0$ to je broj $\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \in S$. Pri tome je

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{(-b)}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

Ako je $a, b \in Q$ i $b \neq 0$, tada je i $\frac{a}{a^2 - 2b^2} \in Q$, $\frac{-b}{a^2 - 2b^2} \in Q$. Naime, nazivnik $a^2 - 2b^2$ je različit od 0, jer bismo inače imali

$$a^2 = 2b^2, \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2, \sqrt{2} = \frac{a}{b} \in Q,$$

što nije tačno. Ako je $b = 0$, mora biti $a \neq 0$.

6.12. Dvojka $(S, \cdot)$ je grupa, a trojka $(S, +, \cdot)$ nije prsten, niti polje. Zašto?

6.13. Operacija $*$ nije ni komutativna ni asocijativna, a operacija $\circ$ je i komutativna i asocijativna. Pošto je $a \circ (b * c) = 2ab + 4ac$ i $(a \circ b) * (a \circ c) = 2ab + 4ac$, operacija $\circ$ je distributivna u odnosu na operaciju $*$.

6.14. Pošto su operacije $\oplus$ i $\odot$ na opisani način definisane pomoću operacija sabiranja i množenja u skupu R, i pošto su operacije $+$ i $\cdot$ asocijativne i komutativne, to važi i za operacije $\oplus$ i $\odot$.

Neutralni element operacije $\oplus$ je -1, a inverzni element od x je $-x-2$. Neutralni element operacije $\odot$ je 0, a inverzni element od $x \neq -1$ je $-\frac{x}{x+1}$. Znači, jedino „nula" „sabiranja" nema inverzni element za „množenje". Pošto je $(R, \oplus)$ komutativna grupa, a $(R, \odot)$ komutativna polugrupa, i pošto važi osobina distribucije, $(R, \oplus, \odot)$ je polje.

6.16.* Poznato je da za svako $a \in N \cup \{0\}$, pri dijeljenju sa 5 postoji tačno jedan određeni količnik koji ćemo označiti sa $q_5(a)$ i tačno jedan određeni ostatak, koji ćemo označiti sa $r_5(a)$, tako da je $r_5(a) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ili, u obliku formule

$$a = 5q_5(a) + r_5(a),\ r_5(a) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Lako se dokazuje da dodavanjem broju a bilo kog broja $5x$, gdje je $x \in N \cup \{0\}$, dobivamo pri dijeljenju sa 5 opet isti ostatak $r_5(a)$, tj.

$$(1) \qquad (\forall\, x, a \in N \cup \{0\})\, r_5(5x + a) = r_5(a).$$

Sada definicije operacija $\oplus$ i $\odot$ možemo ovako zapisati:

$$(\forall\, a, b \in Z_5)\, a \oplus b = r_5(a + b),\ a \odot b = r_5(a \cdot b).$$

Pređimo na dokaz činjenice da je $(Z_5, \oplus, \odot)$ polje.

1° Pošto je $r_5(a + b) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $r_5(a \cdot b) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, to je $a \oplus b \in Z_5$ i $a \odot b \in Z_5$, za sve $a, b \in Z_5$.

2° $a \oplus b = r_5(a \cdot b) = r_5(b + a) = b \oplus a$,
$a \odot b = r_5(a \cdot b) = r_5(b \cdot a) = b \odot a$.
Dakle, operacije $\oplus$ i $\odot$ su komutativne.

3° $(a \oplus b) \oplus c = r_5((a \oplus b) + c) = r_5(r_5(a + b) + c) \overset{(1)}{=} r_5(5q_5(a + b) + r_5(a + b) + c) =$

$$= r_5((a + b) + c).$$

$$a \oplus (b \oplus c) = r_5(a + (b \oplus c)) = r_5(a + r_5(b + c)) \overset{(1)}{=} r_5(5q_5(b + c) + a + r_5(b + c)) = r_5(a + (b + c)).$$

Kako je $(a + b) + c = a + (b + c)$, to je $r_5((a + b) + c) = r_5(a + (b + c))$, pa je i $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, tj. operacija $\oplus$ je asocijativna.

4° Dalje se, istim metodom, vrši dokazivanje asocijativnosti operacije $\odot$ i distributivnosti operacije $\odot$ u odnosu na operaciju $\oplus$. Pri tom se treba koristiti jednakostima:

$r_5([r_5(a \cdot b)] \cdot c) \overset{(1)}{=} r_5(5c \cdot q_5(a \cdot b) + [r_5(a \cdot b)] \cdot c = r_5((a \cdot b) \cdot c)$,
$r_5(a \cdot r_5(b \cdot c)) \overset{(1)}{=} r_5(5a \cdot q_5(b \cdot c) + a \cdot r_5(b \cdot c)) = r_5(a \cdot (b \cdot c))$,
$r_5(a \cdot r_5(b + c)) \overset{(1)}{=} r_5(5a \cdot q_5(b + c) + a \cdot r_5(b + c)) = r_5(a \cdot (b + c))$,
$r_5(r_5(a \cdot b) + r_5(a \cdot c)) \overset{(1)}{=} r_5(5[q_5(a \cdot b) + q_5(a \cdot c)] + r_5(a \cdot b) + r_5(a \cdot c)) = r_5(a \cdot b + a \cdot c)$.

5° Neutralni element za operaciju $\oplus$ je 0, a za operaciju $\odot$ je 1 (provjeriti!).

6° Suprotni element od $a \in Z_5$ je element $5-a$, koji je, zbog $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, također iz Z_5, jer vrijedi:

$$a \oplus (5 - a) = r_5(a + 5 - a) = r_5(5) = 0.$$

7° Da za svaki $a \in Z_5 \setminus \{0\}$ postoji inverzni element zaključujemo ovako: ako je $a \in Z_5 \setminus \{0\}$ i $p_1, p_2 \in Z_5$, $p_1 \neq p_2$, tada je $a \odot p_1 \neq a \odot p_2$ (inače bi bilo $r_5(a \cdot p_1) = r_5(a \cdot p_2)$, pa bi broj $a \cdot p_1 - a \cdot p_2$ pri dijeljenju sa 5 davao ostatak 0, tj. broj $a \cdot (p_1 - p_2)$ bio bi djeljiv sa 5, te bi ili a moralo biti djeljivo sa 5, ili $p_1 - p_2$ djeljivo sa 5, jer je 5 prost broj, što nije moguće zbog $0 < a \leqslant 4$ i $0 < |p_1 - p_2| \leqslant 4$). Na osnovu ovoga zaključujemo da su elementi $a \odot 0$, $a \odot 1$, $a \odot 2$, $a \odot 3$ i $a \odot 4$ međusobno različiti, pa kako ih ima 5 i svi su iz skupa $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, to je jedan od njih jednak 1. Dakle, postoji broj $x \in Z_5$ takav da je $a \odot x = x \odot a = 1$, pa je $x = a^{-1}$.

6.17.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

a) $(-4) = 1$, jer je $4 + 1 = 0$; $(-2) = 3$;
$3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 - 4 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 = 3 + 4 + 1 = 2 + 1 = 3$.

b) $\frac{1}{2} = 3$; $\frac{1}{4} = 4$; $\frac{1}{3} = 2$; $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = 3 \cdot 4 = 2$; $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = 2 \cdot 2 = 4$;
$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = 3 \cdot 2 + 4 = 1 + 4 = 0$.

6.18. *Dokaz*: a) Pošto je $-x$ suprotni element od x u odnosu na operaciju $+$, to vrijedi

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Iz definicije suprotnog elementa u odnosu na operaciju $+$ vidi se da je suprotni element od $(-x)$ element x pa je

$$-(-x) = x.$$

(Tu smo koristili činjenicu da je suprotni element nekog elementa jedinstven.)

b) Vrijedi:

$$(x + y) + [(-y) + (-x)] = [(x + y) + (-y)] + (-x) = [x + (y + (-y))] + (-x) =$$
$$= (x + 0) + (-x) = x + (-x) = 0.$$

Slično se dobije da je

$$[(-y) + (-x)] + (x + y) = 0.$$

Zato element $(-y) + (-x)$ zadovoljava definiciju inverznog elementa od $x + y$, pa je

$$-(x + y) = (-y) + (-x).$$

Zbog komutacije sabiranja imamo konačno

$$-(x + y) = (-x) + (-y)$$

c) $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)$ (na osnovu distribucije), dakle $x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot 0$ tj. $x \cdot 0 = 0$ (po definiciji neutralnog elementa za sabiranje).

Da je $0 \cdot x = 0$, dokazuje se slično.

d) $x + (-x) = 0 \Rightarrow x \cdot y + [(-x) \cdot y] = 0 \cdot y \overset{c)}{=} x \cdot y + [(-x) \cdot y] = 0 \Rightarrow (-x) \cdot y = -(xy)$

(po definiciji neutralnog elementa za sabiranje).

e) Dokazuje se slično kao d).

f) $(-x) \cdot (-y) \overset{d)}{=} -(x \cdot (-y)) \overset{e)}{=} -(-(x \cdot y)) \overset{a)}{=} x \cdot y$.

6.19. a) $(\forall\, c \in G)(\exists\, -c \in G)\, c + (-c) = 0$, pa vrijedi:

$$a + c < b + c \overset{\text{def. 6.7.}}{\Rightarrow} (a + c) + (-c) < (b + c) + (-c) \Rightarrow a + [c + (-c)] < b + [c + (-c)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a + 0 < b + 0 \Rightarrow a < b.$$

b) $a > 0 \overset{\text{a)}}{\Leftrightarrow} a + (-a) > 0 + (-a) \Leftrightarrow 0 > -a \Leftrightarrow -a < 0.$

d) Nejednakosti $a < b$ „dodati" najprije $-a$, a zatim $-b$.

e) $(a > 0 \wedge b > 0) \overset{\text{a)}}{\Rightarrow} [(a + b > 0 + b) \wedge b > 0] \Rightarrow (a + b > b > 0) \Rightarrow a + b > 0$ (jer je relacija $>$ tranzitivna).

f) Iskoristiti osobine c) i e).

g) Dodati prvoj nejednakosti c, a drugoj b.

6.20. a) Prema formuli c), zad. 6.19., je $c < 0 \Leftrightarrow -c > 0$, pa imamo:

$$(a < b \wedge -c > 0) \overset{\text{def. 6.7. b)}}{\Rightarrow} a \cdot (-c) < b \cdot (-c) \overset{\text{zad. 6.18. e)}}{\Rightarrow} -(ac) < -(bc) \overset{\text{zad. 6.19. d)}}{\Rightarrow} ac > bc.$$

b) $(a > 0 \wedge b > 0) \overset{\text{def. 6.7. b)}}{\Rightarrow} a \cdot b > 0 \cdot b \Rightarrow ab > 0.$

e) Pomnožiti nejednakost $a < b$ sa c, a $c < d$ sa b.

f) Pošto je skup P potpuno uređen relacijama $<$, imamo:

$$a \neq 0 \Rightarrow (a > 0 \vee a < 0) \overset{\text{b) ili c)}}{\Rightarrow} a \cdot a > 0 \Rightarrow a^2 > 0.$$

g) $(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow (a < 0 \vee a > 0) \wedge (b < 0 \vee b > 0) \Rightarrow (ab > 0 \vee ab < 0) \Rightarrow ab \neq 0.$

h) Implikacija $\Leftarrow$ je tačna na osnovu osobine množenja sa 0 u prstenu (zad. 6.18), a kada bi u implikaciji $\Rightarrow$ vrijedila suprotna tvrdnja, tada bi vrijedilo:

$(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \overset{\text{g)}}{\Leftarrow} ab \neq 0$, što nije moguće.

6.21. Stavimo $f(1) = a$, $f(-1) = d$, $f(i) = b$, $f(-i) = c$. Odmah se vidi da je $f: G \to H$ bijekcija, i provjeravanjem se ustanovljava da vrijedi:

$$(\forall\, x, y \in G)\, f(x \cdot y) = f(x) \circ f(y),$$

(npr., $f((-1)\cdot(-i)) = f(i) = b$,
$f(-1) \circ f(-i) = d \circ c = b$,
tj. $f((-1)\cdot(-i)) = f(-1) \circ f(-i)$.)

Zato je, prema definiciji 6.6., f izomorfno preslikavanje grupoida $(G, \cdot)$ na grupoid $(H, \circ)$.

6.22. Funkcija je bijektivna, a vrijedi i sljedeće:

$$f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y).$$

Znači, funkcija f je izomorfizam grupe $(R, +)$ na grupu $(R^+, \cdot)$.

6.23. Neka su $x, y \in Z$. Tada imamo:

1° $f(x + y) = x + y - 1$,
$f(x) \ominus f(y) = f(x) + f(y) + 1 = (x - 1) + (y - 1) + 1 = x + y - 1.$

Dakle, $f(x + y) = f(x) \ominus f(y)$.

2° $f(x \cdot y) = x \cdot y - 1$,

$$f(x) \odot f(y) = f(x) \cdot f(y) + f(x) + f(y) = (x - 1) \cdot (y - 1) + (x - 1) + (y - 1) =$$
$$= x \cdot y - x - y + 1 + x - 1 + y - 1 = x \cdot y - 1.$$

Dakle, $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$.

7. PRIRODNI BROJEVI

7.1. Pretpostavimo da tvrdnja nije tačna, tj. pretpostavimo da prostih brojeva ima konačno mnogo, i neka su to brojevi

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, p,$$

od kojih je najveći p. Tada je broj

$$m = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot p) + 1 \tag{1}$$

veći od svih tih prostih brojeva. Zašto m ne može biti prost broj? On, međutim, nije ni složen, a evo zašto. Kada bi broj m bio složen, on bi se, prema teoremi 7.2, mogao napisati kao proizvod nekih prostih brojeva (tj. bio bi njima djeljiv). U izrazu (1) za m sadržani su svi prosti brojevi, a broj m nije ni sa jednim od njih djeljiv (jer je ostatak 1).

Znači, broj m nije ni prost ni složen, a nije ni 1, što je nemoguće. Prema tome, prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

7.2. Pošto je $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$, i pošto je n prost broj veći od 3, n je neparan broj. Zato su $n-1$ i $n+1$ uzastopni parni brojevi pa $8 \mid (n^2 - 1)$. Sada zaključiti da je jedan od brojeva $n-1$ i $n+1$ djeljiv sa 3, i misliti na teoremu 7.1.

7.3. $a = 3^{3n}(3^{3n} + 3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1) = \ldots = 3^{3n}(3^n + 1)^3$.
Sada zaključiti da je broj 3^{n+1} paran itd.

7.4. Ako proizvod označimo sa a, tada je

$$a = (n-1)(n+1)n \cdot n(n^2 + 1),$$

pri čemu je, očigledno, $n > 1$.

1° Od tri susjedna broja $n-1, n$ i $n+1$ jedan je djeljiv brojem 3. Ako je n paran, tada $4 \mid n \cdot n$, a ako je n neparan, tada $4 \mid (n-1)(n+1)$. Pošto je $D(3, 4) = 1$, to $3 \cdot 4 \mid a$, tj. $12 \mid a$ (teorema 7.1).

2° Prema teoremi 7.4. je

$$n = 5k + r, \quad k, r \in N \cup \{0\}, \quad 0 \leqslant r < 5.$$

Ako je $n = 5k$, tada $5 \mid n$. Ako je $n = 5k + 1$, tada $5 \mid (n-1)$ itd.

7.5. *Prvo rješenje.* Izvedimo dokaz pomoću matematičke indukcije.

1° Za $n = 1$ je $10^1 + 18 \cdot 1 - 1 = 27$, a $27 \mid 27$.

2° Pretpostavimo da $27 \mid a$ za $n = k \geqslant 1$, tj. da je

$$10^k + 18k - 1 = 27q, \quad q \in N. \tag{1}$$

Za $n = k + 1$ imamo:

$$a = 10^{k+1} + 18(k+1) - 1 = \ldots = (10^k + 18k - 1) + 9 \cdot 10^k + 18 \overset{(1)}{=} 27q + 9(10^k + 2).$$

Zašto je broj $10^k + 2$ djeljiv sa 3? (Posmatraj zbir njegovih cifara). Znači, broj a je djeljiv sa $k+1$, ukoliko je djeljiv sa k.

3° Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je broj a djeljiv sa 27 za svaku vrijednost $n \in N$.

Drugo rješenje. $10^n + 18n - 1 = (10-1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) + 18n =$

$= 9[(9+1)^{n-1} + (9+1)^{n-2} + \ldots + (9+1) + 1 + 2n] \overset{(1)}{=} 9(9k + n + 2n) = 27(k + n)$. Na mjestu (1) iskorišćena je binomna formula (vidi primjer 3.6).

7.6. *Prvo rješenje.* Primijeniti metodu matematičke indukcije (vidjeti prethodni zadatak) i uočiti da vrijedi jednakost

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18.$$

Drugo rješenje. Prema binomnoj formuli (primjer 3.6) imamo:

$$4^n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 =$$

$$= \left[3^n + \binom{n}{1}\cdot 3^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 3^2 + \binom{n}{n-1}\cdot 3 + 1\right] 15n - 1 =$$

$$= 3^2\cdot\left[3^{n-2} + \binom{n}{1}\cdot 3^{n-3} + \ldots + \binom{n}{n-2}\right] + 3n + 1 + 15n - 1 = 9q + 18n = 9\cdot(q+2),\ q+2\in N.$$

7.7. Ako stavimo $f(n) = 3\cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$, tada imamo:

1° $f(1) = 391 = 17\cdot 23$, pa $17 \mid f(1)$.

2° Neka za $n = k \geqslant 1$ važi:

(1) $$f(k) = 17\cdot q,\ q\in N.$$

Tada za $n = k+1$ imamo:

$$f(k+1) = 3\cdot 5^{2k+3} + 2^{3k+4} = 3\cdot 5^{2k+1}\cdot 5^2 + 2^{3k+1}\cdot 2^3 = 3\cdot(8+17)\cdot 5^{2k+1} + 8\cdot 2^{3k+1} = \ldots =$$

$$= 8\cdot(3\cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}) + 3\cdot 17\cdot 5^{2k+1} \overset{(1)}{=} \ldots = 17r,\ r\in N.$$

3° Na osnovu principa matematičke indukcije dokaz je završen.

7.8. Izraz $f(k+1)$ može se dovesti na oblik

$$6\cdot(5^{2k+3} + 3^{k+3}\cdot 2^k) + 19\cdot 5^{2k+3}.$$

7.9. *Prvo rješenje.* 1° Za $n = 2$ je $n^3 + 20n = 48$, a $48 \mid 48$.

2° Neka je tvrdnja tačna za $n = 2k$, $k \geqslant 1$, tj. neka je

$$(2k)^3 + 20\cdot(2k) = 48q,\ q\in N.$$

Za $n = 2(k+1)$ se $n^3 + 20n$ može napisati u obliku

$$24\cdot[2q + (k^2 + k + 2)],$$

i treba još dokazati da je broj $k^2 + k + 2$ paran.

Drugo rješenje. Za $n = 2k$ je $n^3 + 20n = 8k(k^2 + 5)$, pa je dovoljno dokazati da je broj $k(k^2 + 5)$ paran i da $3 \mid k(k^2 + 5)$. (Sjeti se da je $k = 3q + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$.)

7.10. Raditi pomoću matematičke indukcije.

7.11. Djeljivost sa 6 dokazati pomoću rastavljanja, a kod dokazivanja djeljivosti sa 7 (pomoću matematičke indukcije), pri prelazu od broja k na broj $k+1$ koristiti se binomnom formulom:

$$(k+1)^7 - (k+1) = \left[\binom{7}{0}k^7 + \binom{7}{1}k^6 + \ldots + \binom{7}{7}\right] - (k+1) =$$

$$= (k^7 - k) + \left[\binom{7}{1}k^6 + \binom{7}{2}k^5 + \ldots + \binom{7}{6}k\right]$$

Ovdje sada treba koristiti indukativnu pretpostavku za $n = k$ i uočiti da je izraz u srednjoj zagradi djeljiv sa 7.

7.12. Prvo treba zaključiti da je $n \geqslant 3$. Sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ možemo razložiti na ove tri klase:

$$N_0 = \{3q : q\in N\},\ N_1 = \{3q+1 : q\in N\},\ N_2 = \{3q+2 : q\in N\}.$$

Sada se dokazuje da $n\in N_0$ i to $n = 3$, dok u klasama N_1 i N_2 nema rješenja.

Rezultat: Brojevi n, $n+10$ i $n+14$ su prosti ako i samo ako je $n = 3$.

7.13. Ako sa D označimo najveći zajednički djelilac brojeva $21n + 4$ i $14n + 3$, tada je

$$21n + 4 = D\cdot p \text{ i } 14n + 3 = D\cdot q,\ p,\ q\in N.$$

Eliminacijom broja n dobije se jednakost

$$(3q - 2p)\cdot D = 1,$$

i pošto je $D\in N$, to je $D = 1$. Pošto je, dakle, $D(21n+4, 14n+3) = 1$, ti su brojevi relativno prosti.

7.14. a) Neka je $n = 10a + b = (10q+1)\cdot r$, $r\in N$. Kada se odavde izrazi b, dobije se da je

$$a - bq = \ldots = (10q+1)(a - qr),$$

$$a - bq = m(a - qr),\ m\in N.$$

Znači, $a - bq$ je djeljivo sa m, tj. uslov je potreban.

b) Neka je $a - bq = m \cdot p$, tj. $a = mp + bq$. Tada je

$$n = \ldots = (10q + 1)(10p + b),$$
$$n = m \cdot (10p + b).$$

Znači, broj n je djeljiv sa m, tj. uslov je dovoljan.

7.15. Uočiti da $3 \mid (n - 1)$ ili $3 \mid (n + 1)$, a umjesto formule $n^2 = 12q + 1, q \in N$, može se dokazati ekvivalentna formula $n^2 - 1 = 12q$.

7.16. Pogledati uputu za prethodni zadatak.

7.17. Raditi pomoću matematičke indukcije.

7.18. Stavi li se da je $\overline{abc} = x = 10^2 a + 10b + c$ itd., dobije se da je $x = 857$.

7.19. Označimo li tražene brojeve sa $\overline{abcd}$, tada iz uslova zadatka imamo:

$$45 \mid \overline{abcd} \Rightarrow (d = 0 \vee d = 5) \wedge 9 \mid (a + b + c + d),$$
$$(b - c)(b + c) = 24.$$

Zaključujemo da $(b + c) \mid 24$, $b + c < 18$ i $b + c > b - c$, odakle slijedi da je $b + c = 6$ ili $b + c = 8$ ili $b + c = 12$ itd.

Traženi brojevi su:

3510, 7515, 6750 i 2755.

7.20. Ako nepoznate cifre broja n označimo sa a i b, tada vrijede implikacije:

$$45 \mid n \Rightarrow (5 \mid n \wedge 9 \mid n) \Rightarrow (b = 0 \vee b = 5) \wedge (3 + 7 + a + 1 + 5 + b = 9q, \quad q \in N).$$

Rezultat:

$$a = 6,\ b = 5,\ m = 8359.$$

7.21. Trocifreni broj jednakih cifara ima oblik

$$100x + 10x + x = 111 \cdot x,\ x \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$$

Ako sa n označimo broj sabiraka, tada, prema primjeru 3.5, imamo:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 111 \cdot x.$$
$$n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x.$$

Zaključiti da je $\frac{n(n+1)}{2} > 111$, tj. da je $n \geqslant 15$. Cifru x treba odrediti tako da je broj $2 \cdot 3 \cdot x \cdot 37$ proizvod dva susjedna prirodna broja n i $n + 1$ koji nisu manji od 15. Od dvije mogućnosti:

$$2 \cdot 3x = 36 \text{ i } 2 \cdot 3 \cdot x = 38$$

preostaje samo prvi slučaj, odakle je $x = 6$.

Rezultat:

$$n = 36,\ 111 \cdot x = 666.$$

7.22. Broj n ima oblik

$$n = 100m + 10a + b,\ m \in N \cup \{0\}.$$

a) Neka $4 \mid n$. Pošto $4 \mid 100m$, potrebno je da $4 \mid (10a + b)$. Pošto je $10a + b = 8a + (2a + b)$, potrebno je da $4 \mid (2a + b)$. Uslov je, dakle, potreban.

b) Lako je sada dokazati da je uslov i dovoljan.

7.23. Ako cifre broja m označimo sa a, a cifre broja n sa b, tada iz uslova zadatka slijede jednačine:

$$111\,111 \cdot a = (1\,111 \cdot b) \cdot 233 + r.$$
$$11\,111 \cdot a = (111 \cdot b) \cdot 233 + (r - 1000),$$

a iz njih jednačina

$$100 \cdot a = 233 \cdot b + 1.$$

Pošto $10 \mid 100 \cdot a$, da bi broj $233 \cdot b + 1$ bio djeljiv sa 10 mora biti $b = 3$, a onda slijedi da je $a = 7$.

Rezultat:

$$m = 777\,777,\ n = 3333.$$

7.24. Brojevi $\overline{34x5y}$ treba da su djeljivi sa 4 i sa 9. Zato treba da $4 \mid \overline{5y}$, pa je $y = 2$ ili $y = 6$. Ako je $y = 2$, tada je $x = 4$ (jer je tada zbir cifara djeljiv sa 9). Ako je $y = 6$, zaključiti da je tada $x = 0$ ili $x = 9$.

Rezultat:

34452, 34056, 34956.

7.25. Označimo li cifre proizvoda sa a, a cifre zbira sa b, tada imamo:

$$x \cdot y = \overline{aaa} = 111 \cdot a = 37 \cdot 3 \cdot a,$$

$$x + y = \overline{bb} = 11 \cdot b.$$

Zaključiti da je $x = 37p$, $y = 3q$, $p, q \in N$, i da u obzir dolazi $x = 37$ ili $x = 74$, pa posmatrati jednakosti

$$q = \frac{11b - 37}{3} \text{ i } q = \frac{11b - 74}{3}.$$

Rezultat:

$$x = 37, \ y = 18;$$
$$x = 74, \ y = 3.$$

7.26. 1° Za brojeve 1 000, 2 000, 3 000, ..., 9 000 taj je omjer jednak 1 000.

2° Za sve ostale brojeve $\overline{abcd}$ je

(1) $$a + b + c + d \geqslant a + 1.$$

S druge strane je $\overline{abcd} < \overline{(a+1)000}$, tj.

(2) $$\overline{abcd} < 1\,000 \cdot (a + 1).$$

Prema 1°, i na osnovu formula (1) i (2) može se zaključiti da najveći omjer, i to 1 000, imamo u slučaju brojeva 1 000, 2 000, ..., 9 000.

7.27. Pošto je $m = 100a + 10b + c$, i pošto je $a = 7 - b - c$, imamo:

$$m = 100(7 - b - c) + 10b + c = 700 - 90b - 99c = 700 - 91b - 98c + b - c,$$

$$m = 7(100 - 13b - 14c) + (b - c).$$

a) Neka $7 \mid m$; tada je potrebno da $7 \mid (b - c)$, a to je moguće samo ako je $b = c$ (jer je $b < 7$ i $c < 7$). Znači, uslov je potreban.

b) Dokaz da je uslov dovoljan je sada lagan.

7.28*. Ako posmatrane brojeve napišemo u obliku $10 \cdot a + b$, tada imamo:

$$(10a + b) - (10b + a) = k^2, \ k \in Z,$$
$$9(a - b) = k^2.$$

Pošto je $9 = 3^2$, to je $a - b$ kvadrat cijelog broja, a pošto su a i b cifre, to je

$$a - b \in \{0, 1, 4, 9\}.$$

1° Ako je $a - b = 0$, tj. $a = b$, brojevi su oblika $11 \cdot a$, tj.

$\overline{aa}$, $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, kojih ima 9.

2° Ako je $a - b = 1$, tj. $b = a - 1$, brojevi su oblika $11a - 1$, odnosno $\overline{a(a-1)}$, $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ i ima ih 9.

3° Uvjeriti se da postoji svega 6 brojeva za koje je $b = a - 4$.

4° Ako je $b = a - 9$, imamo samo broj 90.

Prema tome, imamo ukupno $9 + 9 + 6 + 1 = 25$ brojeva koji zadovoljavaju uslove zadatka.

7.29.* Pošto je $1! + 4! + 5! = 145$, broj 145 zadovoljava uslove zadatka. Dokažimo da je to jedini takav trocifreni broj. Potražimo sve cifre x, y i z tako da je

(1) $$a = 100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

Pošto je $7! > 1\,000$, to je $x < 7$, $y < 7$ i $z < 7$. Kada bi bar jedna od cifara x, y i z bila 6, tada bi bilo $x! + y! + z! > 700$, a $100x + 10y + z < 700$, pa jednakost (1) ne bi bila tačna. Kada nijedna cifra ne bi bila jednaka 5, tada bi bilo $(x! + y! + z!)_{max} = 4! + 4! + 4! = 72$, a to nije trocifreni broj. Znači, bar jedna cifra mora biti 5. Tada iz jednakosti $(x! + y! + z!)_{max} = 3 \cdot 5! = 360$, slijedi da je $x \in \{1, 2, 3\}$. Međutim, $x \neq 3$, jer je $300 + 10y + z > 300$, a $(3! + y! + z!)_{max} = 3! + 2 \cdot 5! = 246 < 300$. Također je $x \neq 2$, jer bi inače bilo $200 + 10y + z \geqslant 200$, a nejednakost $2! + y! + z! > 200$ je moguća samo za $y = z = 5$, kada je $2! + 5! + 5! = 242$. Ovaj slučaj, očito, otpada. Dakle je $x = 1$.

Znači,

$$a = 100 + 50 + z = 150 + z,$$

ili

$$a = 100 + 10y + 5 = 105 + 10y.$$

U prvom slučaju bismo imali:

$$150 + z = 1! + 5! + z!,$$
$$29 = z[(z - 1)! - 1],$$

ali za $z \leqslant 5$ ovo nije moguće. U drugom slučaju imamo:

$$105 + 10y = 1! + y! + 5!,$$

$$y[10 - (y-1)!] = 16,$$

a jedino rješenje ove jednačine je $y = 4$.

Znači, $x = 1$, $y = 4$, $z = 5$, pa je broj 145 jedino rješenje problema.

8. CIJELI BROJEVI

8.1. Pošto je $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$, bar jedan od ova tri broja je paran, a jedan je djeljiv sa 3. Ako je, naime, $n = 3k$, tada $3 \mid n$, ako je $n = 3k+1$, tada $3 \mid (n-1)$ itd. (vidjeti teoremu 8.2).

8.2. Broj a napisati u obliku $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ i vidjeti prethodni zadatak.

8.3. Pošto je $n = (2p-1)^2 - (2q-1)^2 = 4(p-q)(p+q-1)$, $p, q \in Z$, dovoljno je dokazati da je ili $p-q$ ili $p+q-1$ paran broj.

8.4. Prvi broj je $100a + 10(a+1) + (a+2)$, $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$, a pokaže se da je razlika jednaka -198.

8.5. Svesti dati izraz na oblik $16[k(k+1)+2]^2$ itd.

8.6. Ako dati izraz označimo sa $f(n)$, tada se, pri prelazu od k na $k+1$, može formirati izraz

$$f(k+1) = 2^{12k+3} - 3^{6k+2} + 13 \cdot 315 \cdot 2^{12k+3} - 13 \cdot 56 \cdot 3^{6k+2}.$$

8.7. Treba dokazati tačnost ekvivalencije

$$3p + 2q = 5k \Leftrightarrow 4p + q = 5r, p, q, k, r, \in Z.$$

Dokaz implikacije $\Rightarrow$. Neka je $4p + q = 5r$. Tada imamo:

$$3p + 2q = (4p + q) - p + q = 5r + (4p + q) - 5p = 5r + 5r - 5p = 5(2r - p) = 5k,\ k \in Z.$$

8.8. U zadatku b) posmatrati razliku $S_1 - S$ i iskoristiti zadatak a). Na kraju se može zaključivati ovako: ako $6 \mid S_1$, tada $6 \mid S$, a ako nije tačno $6 \mid S_1$, tada nije tačno $6 \mid S$.

8.9. Ako broj n sadrži k faktora p, tada ih broj n^2 sadrži $2k$, tj: paran broj, jer vrijedi:

$$(n = p^k \cdot n_1,\ n_1 \in Z \setminus \{0\},\ p \nmid n_1) \Rightarrow n^2 = p^{2k} \cdot n_1^2,\ p \nmid n_1^2.$$

Ako bi važila jednakost $m^2 = pn^2$, tada bi važila i jednakost

$$m^2 = p^{2k+1} \cdot n_1^2,\ p \nmid n_1^2.$$

Znači, broj m^2 sadrži neparan broj $2k+1$ faktora p, a prema gore dokazanom m^2 sadrži paran broj ili 0 faktora p. Pogledati teoremu 7.2. (koja važi i u skupu Z), pa izvesti zaključak.

8.10. Prema Njutnovoj binomnoj formuli (primjer 3.6) imamo:

$$(x+y)^7 = \binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6 y + \ldots + \binom{7}{6}xy^6 + \binom{7}{7}y^7 = \ldots = (x^7 + y^7) + [7xy(x^5 + y^5) + 21x^2y^2(x^3 + y^3) + 35x^3y^3(x+y)].$$

Zaključiti da je izraz u srednjoj zagradi djeljiv sa 49, itd.

8.11. Za $n = 1$ imamo:

$$a^5 - a = \ldots = a(a^2-1)[(a^2-4)+5] = \ldots,$$
$$a^5 - a = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) + 5(a-1)a(a+1).$$

Zaključiti da je $a^5 - a = 30p$, $p \in Z$.

Pretpostaviti da tvrdnja vrijedi za $n = k \geqslant 1$, a broj $a^{4^{n+1}} - a$, za $n = k+1$ svesti na oblik $(a^{4^{k+1}} - a) + a^{4^k}(a^5 - a)$ itd.

8.12.* Neka dužine a i b kateta nisu djeljive sa 5. Onda imamo:

$$a = 5k + r,\ 1 \leqslant r \leqslant 4.$$

Tada je $a^2 = 5l + r^2$, i pošto $r^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$, to je

$$a^2 = 5m \pm 1 \text{ i slično } b^2 = 5n \pm 1,$$

pa je

$$c^2 = \begin{cases} 5(m+n) \text{ ili} \\ 5(m+n) \pm 2. \end{cases}$$

Drugi slučaj otpada, jer bi se inače kvadrat prirodnog broja c završavao jednom od cifara 2, 3, 7, 8, što nije moguće. Preostaje, dakle, slučaj $c^2 = 5(m+n)$, tj. $5 \mid c^2$, odnosno $5 \mid c$.

8.13. Podijeliti datu jednačinu sa 3. Odgovor je negativan.

8.14. Staviti $n = 2k$, $k \in Z$ i dati izraz svesti na oblik

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Jasno je da $2 \mid k(k+1)$, pa još treba zaključiti da je brojnik djeljiv sa 3 (treba imati na umu teoremu 8.2).

8.15. Prema teoremi 8.2. je

$$a = 30 \cdot q + r,\ q \in Z,\ r \in \{0, 1, 2, \ldots, 29\}.$$

Zaključiti da brojevi 30 i r ne smiju imati zajedničkih djelioca. Pošto je $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ostatak r ne smije biti djeljiv sa 2, 3 i 5.

8.16. Proizvoljan parni broj koji nije djeljiv sa 4 možemo napisati u obliku $2k$, gdje je k neparan broj. Dokazati da ne može postojati jednakost

$$2k = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n),\ m, n \in Z,$$

jer bi tada brojevi $m - n$ i $m + n$ bili oba parni ili oba neparni.

8.17. Broj $a = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$ je paran. Paran broj može biti kvadrat samo parnog broja, što znači da je taj kvadrat djeljiv sa 4, a broj a to nije. Zašto?

8.18. Iz date jednačine slijedi da je

$$x = \frac{200 - 59y}{27} = 7 - 2y + \frac{11 - 5y}{27}.$$

Da bi x bio cio broj, mora biti $\frac{11 - 5y}{27} = t$ cio broj. Odavde slijedi

$$y = \frac{11 - 27t}{5} = 2 - 5t + \frac{1 - 2t}{5},\ \frac{1 - 2t}{5} = u,\ u \in Z.$$

Dalje, iz jednakosti $t = \frac{1 - 5u}{2} = -2u + \frac{1 - u}{2}$ dobijemo da je

$$\frac{1 - u}{2} = v,\ v \in Z, \text{ odnosno } u = 1 - 2v.$$

Sada slijedi da je $t = -2 + 5v$, $y = 13 - 27v$, $x = -21 + 59v$.

Skup rješenja je

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in Z^2 : x = -21 + 59v,\ y = 13 - 27v,\ v \in Z\}.$$

8.19. Svaki od $n+1$ cijelih brojeva, pri dijeljenju sa n ($n \in N$) daje po jedan ostatak r iz skupa ostataka $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ (teorema 8.2) koji ima n elemenata. Svih $n+1$ brojeva daju ukupno $n+1$ ostataka, ali njih ima najviše n različitih. Zato između $n+1$ brojeva postoje bar dva broja sa jednakim ostacima pri dijeljenju sa n[1]. Sada treba konačan zaključak izvesti na osnovu teoreme 8.3.

8.20. Ovo je specijalan slučaj relacije kongruencije kod koje je $m = 3$ (vidjeti prethodni zadatak), pa je ovo relacija ekvivalencije. Njene klase su ovi skupovi:

$$3Z = \{3z : z \in Z\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\},$$
$$3Z + 1 = \{3z + 1 : z \in Z\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\} \text{ i}$$
$$3Z + 2 = \{3z + 2 : z \in Z\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

[1] Ovdje se koristi takozvani Dirišleov princip koji se može iskazati ovako: ako je u n kutija smješteno $n+1$ kuglica, tada su u bar jednoj kutiji smještene bar dvije kuglice. (J. Dirichlet je živio od 1805. do 1859. godine.)

8.21. Ovdje ćemo dokazati samo osobinu tranzitivnosti relacije kongruencije. Za sve $a, b, c \in Z$ vrijedi:

$$[a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \wedge b \equiv c(\mathrm{mod}\, m)] \overset{\text{def. 8.3.}}{\Rightarrow} (a - b = mq \wedge b - c = mq') \Rightarrow (a - b) + (b - c) = m(q + q') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - c = mq'' \overset{\text{def. 8.3.}}{\Rightarrow} a \equiv c(\mathrm{mod}\, m), \text{ jer je } q'' \in Z.$$

8.22. Na osnovu definicije 8.4. kongruencije imamo:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &\equiv b_1 (\mathrm{mod}\, m) \\ a_2 &\equiv b_2 (\mathrm{mod}\, m) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 - b_1 = mq' \wedge q' \in Z) \Rightarrow a_1 = b_1 + mq', \\ (a_2 - b_2 = mq'' \wedge q'' \in Z) \Rightarrow a_2 = b_2 + mq'' \end{cases}$$

Iz dvije posljednje jednakosti dobijemo:

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + mq,\ q \in Z,\ (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = mq,$$
$$a_1 + a_2 \equiv (b_1 + b_2)(\mathrm{mod}\, m).$$

Slično se izvodi zaključak za oduzimanje i množenje kongruencija po istom modulu. Napomenimo da ovako možemo sabirati i množiti općenito n kongruencija.

8.23. Tačnost zaključka slijedi na osnovu prethodnog zadatka, prilikom međusobnog množenja n kongruencija oblika $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

8.24. Pošto je $37 = 7 \cdot 5 + 2$, $16 = 7 \cdot 2 + 2$, $23 = 7 \cdot 3 + 2$, prema teoremi 8.4, vrijedi:

$$37 \equiv 2(\mathrm{mod}7),\ 16 \equiv 2(\mathrm{mod}7),\ 23 \equiv 2(\mathrm{mod}7).$$

Odavde, na osnovu rezultata u prethodnom zadatku, slijede kongruencije:

$$37^{n+2} \equiv 2^{n+2}(\mathrm{mod}7),\ 16^{n+1} \equiv 2^{n+1}(\mathrm{mod}7),\ 23^{n} \equiv 2^{n}(\mathrm{mod}7).$$

Na osnovu ove tri kongruencije izvesti konačan zaključak.

8.25. Vidjeti prethodni zadatak i formirati kongruencije

$$72 \equiv -3(\mathrm{mod}25),\ 47 \equiv -3(\mathrm{mod}25),\ 28 \equiv 3(\mathrm{mod}25).$$

Odgovarajućim stepenovanjem, sabiranjem i oduzimanjem ovih kongruencija dobije se da je

$$a \equiv (3^{2n+2} - 3^{2n} + 3^{2n-1})(\mathrm{mod}25),$$

a odatle

$$a \equiv 25 \cdot 3^{2n-1}(\mathrm{mod}25).$$

Pošto je $25 \mid 25 \cdot 3^{2n-1}$ za svaku vrijednost $n \in N$, prema teoremi 8.3, i broj a je djeljiv sa 25.

8.26. Iz jednakosti $2^4 = 13 + 3$ i $7^2 = 13 \cdot 4 - 3$ slijedi:

$$2^4 \equiv 3(\mathrm{mod}13),\ 7^2 \equiv -3(\mathrm{mod}13),$$
$$2^{60} \equiv 3^{15}(\mathrm{mod}13),\ 7^{30} \equiv -3^{15}(\mathrm{mod}13)$$

itd.

8.27. Pošto je $a \neq b$, prema definiciji 8.4, slijedi da je

$$a \equiv b(\mathrm{mod}(a - b)),$$

odakle slijedi da je

$$a^n \equiv b^n(\mathrm{mod}(a - b)),$$

što znači da je $a^n - b^n$ djeljivo sa $a - b$.

Formule b) i c) dokazuju se na sličan način.

9. RACIONALNI I REALNI BROJEVI. APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNOG BROJA

9.1. RACIONALNI I REALNI BROJEVI

9.1. *Dokaz.* Za broj $\frac{r+s}{2}$ kažemo da je aritmetička sredina brojeva r i s. Dokažimo da je

$$r < \frac{r+s}{2} < s,$$

ukoliko je $r < s$. Pošto u skupu Q vrijedi formula (9.1)

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$

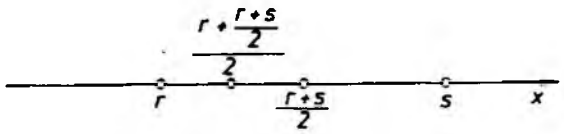
imamo:

$$r < s \Rightarrow r + r < r + s,\ r < s \Rightarrow r + s < s + s,$$

tj.

$$r + r < r + s < s + s,$$

$$r < \frac{r+s}{2} < s.$$



Na isti način slijedi da je

$$r < \frac{r + \frac{r+s}{2}}{2} < \frac{r+s}{2}$$

itd. Znači, između racionalnih brojeva r i s postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

9.2. *Rješenje.*

$$r + 0{,}21 = 0{,}212121\ldots,$$
$$100\,r = 21{,}212121\ldots = 21 + r,$$
$$99\,r = 21,$$
$$r = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Vidjeti i drugi način rješavanja zadatka — zadatak 20.38.

9.3. a) Vidjeti prethodni zadatak.

b) *Rješenje.* $0{,}1222\ldots = 0{,}1 + 0{,}0222\ldots,$

$$0{,}0222\ldots = x \Leftrightarrow 10 \cdot 0{,}0222\ldots = 10\,x,$$
$$0{,}222\ldots = 0{,}2 + x = 10\,x,$$
$$9\,x = 0{,}2,\ x = \frac{0{,}2}{9},$$
$$0{,}1222\ldots = \frac{1}{10} + \frac{0{,}2}{9} = \frac{11}{90}$$

Drugi način rješavanja vidi u 20, zadatak 20.39.

9.4. $12{,}3\dot{2} = 12{,}3 = 0{,}0\dot{2}$,

$0{,}0222\ldots = x$.

$x = \frac{0{,}2}{9} = \frac{2}{90}$,

$12{,}3\dot{2} = \frac{1109}{90}$.

9.5. Iz uslova $n \neq 1$, $\frac{n+2}{n^2+1} > \frac{1}{3}$; $0 < \frac{n-3}{n^2-4} < \frac{1}{10}$, $n \neq 2$, slijedi da je $n = 4$, pa je $\frac{n}{n^2-1} = \frac{4}{15}$.

9.6. *Dokaz. Prvi način.* Pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. Tada bi se on mogao napisati u obliku $\frac{m}{n}$, $m, n \in N$, pri čemu su m i n relativno prosti brojevi. Tada bismo imali:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow 2 \mid m^2 \Rightarrow 2 \mid m^{1)}$$

tj.
$$m = 2k,\ k \in N.$$

Tada bi jednakost $m^2 = 2n^2$ imala oblik
$$n^2 = 2k^2.$$

To znači da $2 \mid n$. Prema tome, brojevi m i n ne bi bili prosti, suprotno našoj pretpostavci.

Znači, $\sqrt{2}$ nije racionalan, već je iracionalan broj.

Drugi način. Jednakost $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, tj. $m^2 = 2n^2$ nije moguća na osnovu zadatka 8.9. obrazložiti.

9.7. *Uputa*: Zadatak a) riješiti na oba načina, kao i zadatak 9.6. Zadatak c) raditi na drugi način.

b) Neka je $\frac{m}{n} = \sqrt{6}$, tj. $m^2 = 6n^2$; posmatrati jednakost

$$m^2 = 2 \cdot 3 \cdot n^2,$$

i primijeniti tvrdnju dokazanu u zadatku 8.9, jednom na prosti broj 2, a drugi put na prosti broj 3.

9.8. Iracionalan je samo broj u slučaju a). Prema formuli (18.1') je $11^{\log_{11} 150} = 150$, a u slučaju c) imamo:

$$\log_5 25^2 \cdot \log_5 0{,}008 = 4 \cdot \log_5 (8 \cdot 10^{-3}) = 4\,[3 \cdot \log_5 2 - 3 \cdot \log_5 (2 \cdot 5)] = -12.$$

9.9. *Dokaz.* 1° Stavimo $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Tada je

$$a^3 = (5\sqrt{2}+7) - 3(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7})\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\,(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}) -$$
$$-(5\sqrt{2}-7) = 14 - 3\sqrt[3]{50-49} \cdot a = 14 - 3a,$$

tj.
$$a^3 + 3a - 14 = 0.$$

Grupisanjem članova, dobijemo
$$(a-2)(a^2+2a+7) = 0,$$

odakle je $a = 2$, dok jednačina $a^2 + 2a + 7 = 0$ nema rješenja u skupu R. Prema tome, dati prvonavedeni broj je racionalan (i jednak je broju 2).

Primjedba. Uočimo li da je $5\sqrt{2}+7 = (1+\sqrt{2})^3$ i $5\sqrt{2}-7 = (\sqrt{2}-1)^3$, do rješenja se moglo doći i na ovaj, kraći, način:

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2}-1) = 2.$$

---

[1] Ako je proizvod ab prirodnih brojeva a i b djeljiv prostim brojem p, tada je sa p djeljiv a ili b, (ili i a i b). Naime, prema teoremi 7.2, postoje jedinstveni rastavi brojeva a i b na proste faktore:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r, \quad b = q_1 q_2 \cdots q_s,$$

pa je
$$ab = (p_1 p_2 \cdots p_r)(q_1 q_2 \cdots q_s)$$

jedinstven rastav proizvoda ab. Ako $p \mid ab$, tada je p jedan od brojeva p_i ili q_k, pa $p \mid a$ ili $p \mid b$ (pošto među brojevima p_i i q_l može biti jednakih, može biti $p \mid a$ i $p \mid b$).

Pošto $2 \mid m^2$, tj. $2 \mid m \cdot m$, slijedi da $2 \mid m$.

2° Da bismo dokazali i drugi dio tvrdnje, dokažimo najprije tzv. *Lagrangeov* (Lagranž)[1] identitet

$$(*) \qquad \sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Zaista, kvadriranjem jednakosti (*), dobijemo

$$a \pm \sqrt{b} = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}} = a \pm \sqrt{b}.$$

Formula (*) važi za $a \geqslant \sqrt{b}$, $(b \geqslant 0)$.

Prema (*), imamo:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{\frac{3}{2}}+2\frac{1}{\sqrt{2}}+6-\frac{3}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2},$$

pa kako je $\sqrt{2}$ iracionalan broj (vidjeti zadatak 9.6), dokazali smo i drugi dio tvrdnje u zadatku.

9.10. Pošto je

$$x = (2-a^2) + (1-a^2)\sqrt{2},$$

da bi x bio racionalan broj, mora biti $a^2 = 1$, tj. $a = \pm 1$.

Za $a = \pm 1$ je $x = 1$.

9.11. Pretpostavimo da tvrdnja nije tačna, već da je

$$1 + \sqrt{3} = (a + b\sqrt{3})^2 = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}.$$

Pošto su a i b racionalni brojevi, ova jednakost može biti tačna ako i samo ako je

$$a^2 + 3b^2 = 1 \text{ i } 2ab = 1.$$

Pošto je, očito, $b \neq 0$, to je $a = \frac{1}{2b}$, odnosno $a^2 = \frac{1}{4b^2}$, pa iz prve jednačine imamo:

$$12b^4 - 4b^2 + 1 = 0.$$

Ova jednačina, međutim, nema racionalnih rješenja (jer je $D < 0$).

Prema tome, tvrdnja u zadatku je tačna.

9.12. Za vrijednost $x = 1 + \sqrt{3}$ jednačina se može napisati u obliku jednakosti:

$$(42 + 4a + b) + (18 + 2a + b)\sqrt{3} = 0.$$

Pošto $a, b \in Z$, to je $42 + 4a + b$ cio broj, dok je $(18 + 2a + b)\sqrt{3}$ iracionalan broj, osim kada je $18 + 2a + b = 0$. Vidimo da je jednakost moguća samo kada je

$$42 + 4a + b = 0 \text{ i } 18 + 2a + b = 0.$$

Dobije se da je $a = -12$, $b = 6$.

9.13. Da bi rješenja bila racionalna, ona moraju biti realna, a to je za $m \geqslant -\frac{1}{4}$. Pošto $m \in Z$, to je $m \geqslant 0$.

Da bi rješenja

$$x_{1,2} = \frac{1-2m \pm \sqrt{4m+1}}{2m}$$

[1] J. Lagrange (1736—1813) — francuski matematičar

bila racionalna, potrebno je i dovoljno da je $4m+1$ kvadrat cijelog broja k, tj. $4m+1=k^2$, $k\in Z$. Odavde je

$$m=\frac{k^2-1}{4}=\frac{(k-1)(k+1)}{4}.$$

Da bi m bio cio broj, $m\geqslant 0$, potrebno je i dovoljno da je k neparan prirodni broj.

9.14. *Dokaz.* a) Neka se razlomak $\frac{ak+b}{ck+d}$ može skratiti sa m. To znači da postoje brojevi $p, q\in Z$ takvi da je:

$$(*)\qquad ak+b=mp,\ ck+d=mq.$$

Množeći prvu jednakost u (*) sa c, a drugu sa a, i oduzimajući dobijene jednakosti jednu od druge, dobijemo:

$$ad-bc=m(aq-cp),$$

tj. $ad-bc$ je djeljivo sa m.

(Napomenimo da je dati razlomak definisan za $ck+d\neq 0$.)

b) Neka se razlomak $\frac{5k+6}{8k+7}$ može skratiti sa m. Tada, prema a), m dijeli $5\cdot 7-6\cdot 8=-13$, dakle $m\mid 13$. Kako je 13 prost broj, to m može imati samo dvije vrijednosti: 13 i 1.

c) Ako se dati razlomak može skratiti sa m, tada, prema a), m dijeli $21\cdot 3-14\cdot 4=7$, tj. $m=\pm 1$.

9.15. Članovi Njutnovog binomnog razvoja imaju oblik

$$a_k=\binom{100}{k}\cdot 2^{\frac{100-k}{2}}\cdot 3^{\frac{k}{4}},\ k=0,1,2,\ldots,100.$$

Da bi broj a_k bio racionalan, mora k u izrazu $2^{\frac{100-k}{2}}$ biti paran, a u izrazu $3^{\frac{k}{4}}$ djeljiv sa 4. Takvih brojeva k ima 26 i to:

$$0\cdot 4,\ 1\cdot 4,\ 2\cdot 4,\ \ldots,\ 25\cdot 4.$$

Znači, u datom izrazu ima svega 26 racionalnih brojeva.

9.16. a) $\mathscr{R}=N\cup\{0\}$.

b) Za $E(a)=0$ je $\mathscr{R}=R$, a za $E(a)\neq 0$ je $\mathscr{R}=[0,1)$.

c) Očito je da je $x\in Z$, pa ako je k neparan broj, jednačina nema rješenja, a ako je paran, tada je $x=\frac{k}{2}$.

d) $x\in[-1,0)$, $y\in[-1,0)$ ili $x\in[1,2)$, $y\in[1,2)$.

9.17.* Pretpostavimo suprotno, da među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, ima pozitivnih i da je a_m prvi od njih, tj. da je $a_i\leqslant 0$, $(i\leqslant m-1)$, $a_m>0$. Tada je $a_m-a_{m-1}>0$. Dalje, prema uslovu zadatka je $a_{k+1}-a_k\geqslant a_k-a_{k-1}$ za sve $k\,(k=1,2,\ldots,n-1)$, pa za $k=m,\ m+1,\ldots,n-2,\ n-1$ dobijamo, respektivno, sljedeće:

$$a_{m+1}-a_m(\geqslant a_m-a_{m-1})>0, a_{m+2}-a_{m+1}(\geqslant a_{m+1}-a_m)>0,\ldots,$$
$$a_{n-1}-a_{n-2}>0, a_n-a_{n-1}>0, \text{ tj.}$$
$$0<a_m<a_{m+1}<a_{m+2}<\ldots<a_{n-1}<a_n.$$

Međutim, ovo je protivno našoj pretpostavci (u zadatku) da je $a_n=0$. Zato nije moguće da je $a_m>0$ za neko $m=1,2,\ldots,n-1$, pa je $a_k\leqslant 0$ za sve $k=1,2,\ldots,n-1$. Time je tvrdnja (zadatka) dokazana.

9.2. APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNOG BROJA

9.20. a)

$$\frac{|a+b|+|a-b|}{2ab}=\begin{cases}\frac{1}{b}, & \text{za } -a\leqslant b\leqslant a, \quad (a>0),\\ \frac{1}{a}, & \text{za } -b\leqslant a\leqslant b, \quad (b>0),\\ -\frac{1}{a}, & \text{za } b\leqslant a\leqslant -b, \quad (b<0),\\ -\frac{1}{b}, & \text{za } a\leqslant b\leqslant -a, \quad (a<0).\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sgn} b}{|b|} = \dfrac{\operatorname{sgn}(ab)}{|b|}, & |b| \leqslant a (= |a|), \ (a > 0), \\ \dfrac{\operatorname{sgn} a}{|a|} = \dfrac{\operatorname{sgn}(ab)}{|a|}, & |a| \leqslant b (= |b|), \ (b > 0), \\ -\dfrac{\operatorname{sgn} a}{|a|} = \dfrac{\operatorname{sgn}(ab)}{|a|}, & |a| \leqslant -b (= |b|), \ (b < 0), \\ -\dfrac{\operatorname{sgn} b}{|b|} = \dfrac{\operatorname{sgn}(ab)}{|b|}, & |b| \leqslant -a (= |a|), \ (a < 0). \end{cases}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min(|a|, |b|)}, (ab \neq 0).$$

b) Dokazuje se slično slučaju pod a).

9.21. *Dokaz.* a) Datu nejednakost ćemo dokazati metodom matematičke indukcije.

1° Za $n = 1$ je $\left|\sum_{i=1}^{1} a_i\right| = |a_1|$, $\sum_{i=1}^{1} |a_i| = |a_1|$, pa je nejednakost tačna za $n = 1$.

2° Pretpostavimo da je data nejednakost tačna za $n = k (\geqslant 1)$, tj. da je:

(1) $$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i|.$$

Treba dokazati da data nejednakost važi i za $n = k + 1$, ukoliko važi za k, tj. treba dokazati da vrijedi nejednakost:

(2) $$\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|.$$

Zaista, prema (9.13) imamo:

$$\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| + |a_{k+1}| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |a_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|,$$

tj. vrijedi (2).

3° Prema tome, na osnovu principa matematičke indukcije, data nejednakost vrijedi za sve $n \in N$.

9.22. a) *Prvi način*: Posmatrati sve moguće slučajeve: $a = 0$ ili $b = 0$; $a > 0$ i $b > 0$ itd.

Drugi način: Prema (9.6) imamo:

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a| \cdot |b|.$$

Treći način: Primijeniti formulu (9.5).

U slučaju b) primijeniti metodu matematičke indukcije.

c) $(*)\ 1 = \left|\frac{b}{b}\right| = \left|b \cdot \frac{1}{b}\right| \overset{a)}{=} |b| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| \Rightarrow \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$ $(b \neq 0)$,

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \cdot \frac{1}{b}\right| \overset{a)}{=} |a| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| \overset{(*)}{=} |a| \cdot \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

9.24. *Prvi način*: Uočiti da je data jednakost $L = D$ ekvivalentna jednakosti $L^2 = D^2$.

Drugi način: Odvojiti slučaj $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ od slučaja $x < 0$ i $y < 0$.

9.25. a) $E = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$.

b) Dati izraz predstavlja identitet na $E = \{x \in R : x - \frac{x^2}{x+1} \geqslant 0\}$. Kako je $x - \frac{x^2}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow (x \geqslant 0 \vee x < -1)$, to imamo da je

$$E = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty).$$

9.26. Kako je:

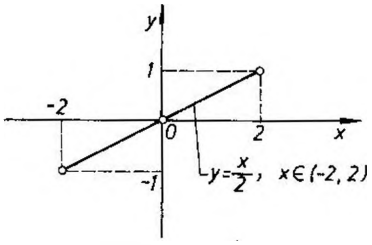
$$\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2}, & \dfrac{x+2}{x-2} \geqslant 0 \\ -\dfrac{x+2}{x-2}, & \dfrac{x+2}{x-2} < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2}, & x > 2 \vee x \leqq -2, \\ \dfrac{x+2}{2-x}, & -2 < x < 2, \end{cases}$$

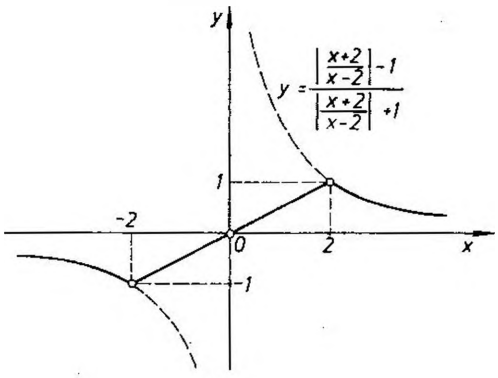
iz formule za $f(x)$ slijedi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}, & x \in (-\infty, -2] \cup (2, +\infty), \\ \dfrac{x}{2}, & x \in (-2, 2). \end{cases} \tag{1}$$

a) Iz (1) imamo $f_1(x) = \dfrac{x}{2}$ za $x \in (-2, 2)$, pa se grafik od f_1 lako nacrta (sl. 9.5).



Sl. 9.5.

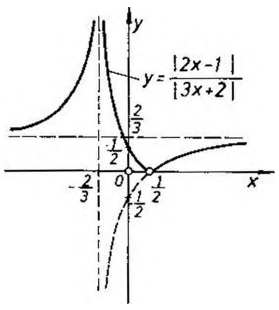


Sl. 9.6.

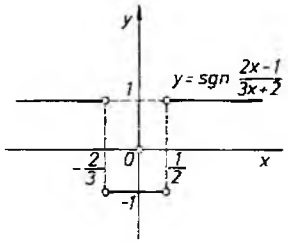
b) Analitički oblik date funkcije f ima oblik (1), pa se grafik od f dobije iz poznatih grafika (sl. 9.6).

c) Sa slika 9.5. i 9.6. vidi se da je $I_m(f_1) = (-1, 1)$, $I_m(f) = [-1, 1)$.

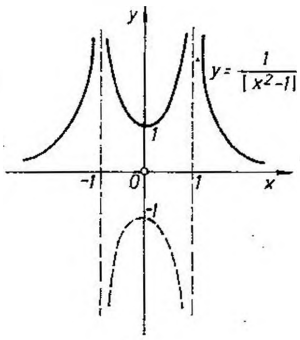
9.27. Grafici datih funkcija dobiju se primjenjujući definiciju funkcija $|\,|$ i sgn i koristeći svojstvo da se izraz $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0,\ c \neq 0)$ može transformirati na oblik $y_0 + \dfrac{m}{x - x_0}$ (gdje su x_0, y_0, m konstante) (sl. 9.7—9.11).



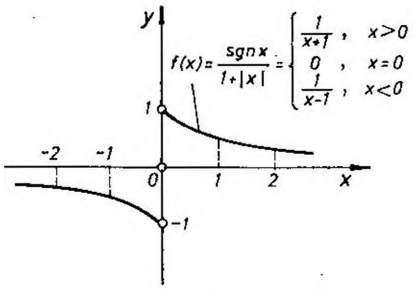
Sl. 9.7.



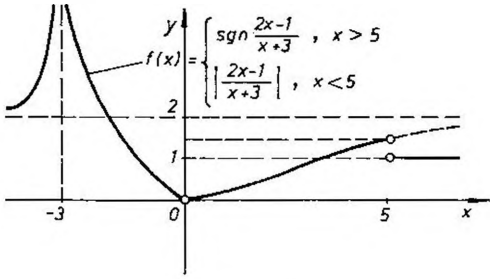
Sl. 9.8.



Sl. 9.9.



Sl. 9.10.



Sl. 9.11.

9.28.* a) Kako je:

$$\max(|x|, |y|) = \begin{cases} |x|, & |y| \leqslant |x| \\ |y|, & |x| \leqslant |y|, \end{cases} = \begin{cases} |x|, & -|x| \leqslant y \leqslant |x|, \\ |y|, & y \geqslant |x| \vee y \leqslant -|x|, \end{cases}$$

to je:

$$\max(|x|, |y|) = 1 \Leftrightarrow (x = \pm 1 \wedge -1 \leqslant y \leqslant 1) \vee (y = \pm 1 \wedge -1 \leqslant x \leqslant 1).$$

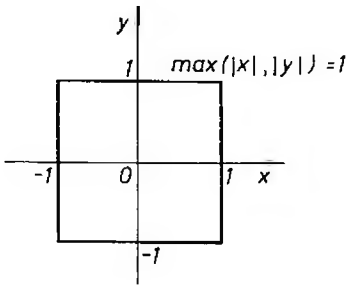
Prema tome, grafik date krive je kvadrat sa tjemenima u tačkama $(\pm 1, \pm 1)$, (sl. 9.12).

b) Za $a = 1$ dobivamo kvadrat sa tjemenima u tačkama (± 1.0), $(0, \pm 1)$; za $a = 2$, grafik je jedinična centralna kružnica.

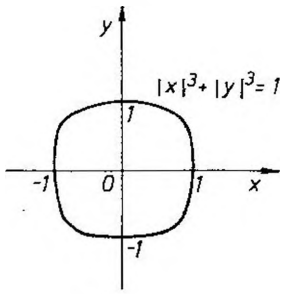
c) Za $a = 3$ imamo:

$$|y|^3 = 1 - |x|^3, \text{ tj. } y = \pm \sqrt[3]{1 - |x|^3}.$$

Posljednji izraz je definisan za $|x| \leqslant 1$, tj. za $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Nalaženjem ostalih elemenata (svojstava), dobijamo graf kao na slici 9.13.



Sl. 9.12.



Sl. 9.13.

10. NEKE TRANSFORMACIJE, JEDNAKOSTI I NEJEDNAKOSTI. BROJEVNE SREDINE

10.1. NEKE TRANSFORMACIJE I JEDNAKOSTI U SKUPU REALNIH BROJEVA

10.1. a) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - c^3 = (a-b)^3 - c^3 = \ldots =$
$= (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + ac - bc).$

b) $a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) =$
$= (a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2) - 4b^2c^2 =$
$= (a^2 - b^2 - c^2)^2 - (2bc)2 = \ldots = [a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] =$
$= (a - b - c)(a + b + c)(a - b + c)(a + b - c).$

10.2. a) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = \ldots$

b) $a^4 + 4b^4 = a^4 + a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = \ldots$

10.3. a) $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) =$
$= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2) = \ldots =$
$= (b-c)[b^2(c-a) + bc(c-a) - a(c^2 - a^2)] = \ldots =$
$= (b-c)(c-a)[c(b-a) + (b-a)(b+a)] = (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c).$

b) $(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = (a-b)^3 + [(b-a) + (a-c)]^3 + (c-a)^3 =$
$= (a-b)^3 + (b-a)^3 + 3(b-a)^2(a-c) + 3(b-a)(a-c)^2 + (a-c)^3 + (c-a)^3 = \ldots =$
$= 3(b-a)(a-c)(b-c).$

10.4. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = [(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + c^3] -$
$- (3abc + 3a^2b + 3ab^2) = [(a+b)^3 + c^3] - 3ab(a+b+c) = \ldots =$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$

10.5. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = \ldots = [(a+b+c) - a][(a+b+c)^2 + a(a+b+c) + a^2] -$
$- (b+c)(b^2 - bc + c^2) = \ldots = (b+c)(3a^2 + 3ab + 3ac + 3bc) =$
$= \ldots = 3(a+b)(b+c)(c+a).$

10.6.* a) $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) =$
$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2[(ab + bc + ca)^2 - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2] =$
$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(ab + bc + ca)^2 + 4abc(a + b + c) =$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{2}(2ab + 2bc + 2ca)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right]^2 = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

b) $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a+b)^3 = -c^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = -c^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$
$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -3ab[(a+b+c) - c] \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$

10.7. a) Pošto vrijedi: $ax + by = 0 \Rightarrow ax = -by \Rightarrow a^2x^2 = b^2y^2$, to imamo:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = \ldots \frac{a^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 + b^2x^2}{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} = \ldots = 1.$$

10.8. $$\frac{abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}{ab+cd} = \frac{abcd\cdot\frac{a+b}{ab} + abcd\cdot\frac{c+d}{cd}}{ab+cd} = \ldots = \frac{(a+b)(ab+cd)}{ab+cd} = a+b.$$

10.9.* $$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = \frac{z}{z+zx+xyz} + \frac{zx}{zx+xyz+z^2xy} + \frac{1}{1+z+zx} = \ldots =$$

$$= \frac{1+z+zx}{1+z+zx} = 1.$$

10.10. $$\frac{a\cdot b^{-2}\cdot(a^{-1}b^2)^4\cdot(a\cdot b^{-1})^2}{a^{-2}\cdot b(a^2b^{-1})^3\cdot a^{-1}\cdot b} = \frac{a^{1-4+2}\cdot b^{-2+8-2}}{a^{-2+6-1}\cdot b^{1-3+1}} = \ldots = \frac{b^5}{a^4}.$$

Za $a = 10^{-3}$ i $b = -10^{-2}$ posmatrani izraz ima vrijednost -10^2.

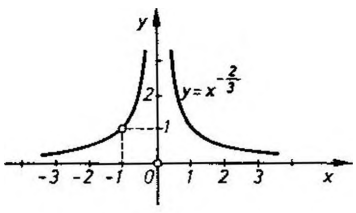
10.11. Pošto je $2n+1$ neparan broj, funkcija je definisana za sve vrijednosti $x \in R$, $x \neq 0$. Izraz $f(x)$ se može pojednostaviti ovako:

$$f(x) = (\underbrace{\sqrt[3(2n+1)]{x^{3(n+2)}\cdot x^{n-4}}}_{}\,)^{-1} = x^{-\frac{4n+2}{3(2n+1)}} = x^{-\frac{2}{3}}.$$

Grafik funkcije f kojoj odgovara formula

$$f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$$

prikazan je na slici 10.1.



Sl. 10.1.

10.12. a) Ako je $a > 0$, stepen a^x definisan je za sve $x \in R$; ako je $a = 0$, stepen a^x definisan je za sve $x > 0$, a ako je $a < 0$, stepen a^x definisan je samo za one racionalne vrijednosti $x = \frac{p}{q}$, p i q relativno prosti cijeli brojevi i q neparan broj (vidjeti i 17.1).

Izraz $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$ definisan je za $a > 0$, a tada su definisani i ostali stepeni osnove a. Izraz $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$ definisan je za $b \neq 0$. Tada je $(b^{-2})^{-\frac{1}{2}} = \ldots = |b|$. Prema tome, izraz $f(a, b)$ definisan je za $a > 0$ i $b \neq 0$.

b) Uz uslove $a > 0$ i $b \neq 0$ izraz $f(a, b)$ se transformiše na oblik

$$f(a, b) = \frac{b^3|b|^3}{a^4}. \tag{1}$$

Kako vrijednosti $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ pripadaju definicionom području izraza $f(a, b)$, uvrštavajući ove vrijednosti u jednakost (1) dobijemo da je $f(a, b) = 1$.

c) Iz jednakosti $\frac{b^3|b|^3}{a^4} = 1$, za $b > 0$ slijedi da je $b = \sqrt[3]{a^2}$, $a \neq 0$, a za $b < 0$ ta jednakost nije tačna (jer je tada $\frac{b^3|b|^3}{a^4} < 0$).

d) Nejednakost $\frac{b^3|b|^3}{a^4} < 0$ je tačna za sve vrijednosti $a > 0$ i $b < 0$, pa je za te vrijednosti $f(a, b) < 0$.

10.13. a) *Uputa:* pomnožiti brojnik i nazivnik datog razlomka sa $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Dobije se $\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$.

Zadatak b) se radi slično, a dobije se $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}$.

10.14. *Uputa:* Prvo pomnožiti brojnik i nazivnik sa $1 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$.
Dobije se $1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8}$.

10.15. Pomnožiti brojnik i nazivnik datog razlomka sa $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$.
Dobije se $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$.

10.16. Pogodnim proširivanjem datog razlomka dobije se

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{a}\sqrt{b})}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c})}{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2ca}.$$

10.17. Uočiti da je $5 + 2\sqrt{6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ i slično za $5 - 2\sqrt{6}$.

10.18. Uočiti da je $9 + 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = (2 + \sqrt{5})^2$.

10.19. *Prvi način.* Uočiti da se može pisati $20 + 14\sqrt{2} = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$ i, također, $20 - 14\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^3$.

Drugi način. Staviti $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, pa se dobije jednačina $x^3 - 6x - 40 = 0$. Jedno njeno realno rješenje $x = 4$ može se odrediti onako kako je objašnjeno u 19.2, ali je to i jedino njeno realno rješenje.

10.20. Označiti dati izraz sa x, pa vidjeti prethodni zadatak.

10.21. Poslije očiglednih transformacija dobije se da je

$$x = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}}, \qquad \sqrt{1 + x^2} = \frac{a + b}{2\sqrt{ab}}.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u dati izraz dobije se

$$\frac{2a\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = a + b.$$

10.22. Posmatrana jednakost se svodi na ove ekvivalentne jednakosti:

$$2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{\sqrt[4]{2a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{b}}{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}\right)^{-2} : \left(1 - \sqrt{\frac{b}{2a}}\right)^2 = 1,$$

$$2\sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}{2\sqrt[4]{2a}}\right)^2 : \left(\frac{\sqrt{2a} - \sqrt{b}}{\sqrt{2a}}\right)^2 = 1 \text{ itd.}$$

10.23. Ovdje treba razlikovati slučajeve:

$$1^\circ \quad x > 0 \wedge |y| \leqslant x \quad \text{i} \quad 2^\circ \quad x > 0 \wedge |y| > x.$$

Tako bi, na primjer, u slučaju 2_1^0: $x > 0 \wedge y < -x$, bilo:

$$x + y < 0,\ x - y > 0,\ x^2 - y^2 < 0,$$

$$\left|x + \sqrt{x^2 - y^2}\right| = \left|x + i\sqrt{y^2 - x^2}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 - x^2} = -y,$$

i slično

$$\left| x - \sqrt{x^2 - y^2} \right| = y,$$

pa jednakost ima ovaj ekvivalentan oblik:

$$(-x - y) + (x - y) = -y - y,$$
$$-2y = -2y.$$

10.24. Dati izraz definisan je ako je
$a \neq 0, b \neq 0, ab \geqslant 0, a - \sqrt{2ab} + b \neq 0, a^3 + b^3 \neq 0$ (tada je $a + b \neq 0, a^2 - ab + b^2 \neq 0$), $b + \sqrt{2ab} \neq 0$, odakle se dobije da je

(1) $$(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0 \wedge b \neq 2a).$$

Nadalje imamo:

$$f(a) = \frac{\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \cdot \dfrac{1}{a + b - \sqrt{2ab}}}{\dfrac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}} \cdot \frac{a^2 b^2 (a + b) \cdot \dfrac{1}{b + \sqrt{2ab}}}{\dfrac{a + b + \sqrt{2ab}}{a(b + \sqrt{2ab})}}.$$

Ako u ovom izrazu za $f(a)$ iskoristimo identitete

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \text{ i } a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab}),$$

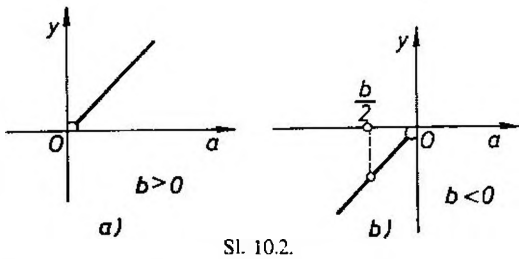
dobijemo da je

(2) $$f(a) = a.$$

Prema (1) i (2) posmatrana funkcija f ima ovo definiciono područje:

$$D(f) = \begin{cases} \{a \in R : a > 0\}, \text{ za } b > 0, \\ \{a \in R : a < 0 \wedge a \neq \dfrac{b}{2}\}, \text{ za } b < 0. \end{cases}$$

Grafik funkcije f prikazan je na slikama 10.2. a) i b), a dobije se kao odgovarajuće suženje (*restrikcija*) linearne funkcije $y = a$.



Sl. 10.2.

10.25.* Označimo li dati izraz sa A, imaćemo:

$$A = \frac{\sqrt{a + \sqrt{x} + \sqrt{a - \sqrt{x}}}}{\sqrt{a^2 - x}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}})^2}}{\sqrt{a^2 - x}},$$

$$A = \frac{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - x})}}{\sqrt{a^2 - x}}.$$

Za $x = 4(a - 1)$ je $a^2 - x = (a - 2)^2$, pa je

$$A = \frac{\sqrt{2(a + |a - 2|)}}{|a - 2|}.$$

Za $1 < a < 2$ je $A = \dfrac{2}{2 - a}$, a za $a > 2$ je $A = \dfrac{2\sqrt{a - 1}}{a - 2}$.

10.26.* Ako uvedemo oznaku $A = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}$, tada imamo:

$$A = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} = \sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} = \sqrt[3]{a} \cdot x.$$

Slično se dobije da je $A = \sqrt[3]{b} \cdot y$ i $A = \sqrt[3]{c} \cdot z$. Sada treba ove tri jednakosti za A podijeliti sa x, y i z, pa dobijene tri jednakosti sabrati itd., pa se na kraju dobije da je

$$A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

10.27. U zadacima ove vrste stepene koje uspoređujemo treba (ako je to moguće) svesti ili na iste osnove ili na iste eksponente.

a) $4^{-30} = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^{10} = \left(\frac{1}{64}\right)^{10}$, $3^{-40} = \ldots = \left(\frac{1}{81}\right)^{10}$. Pošto je $\left(\frac{1}{81}\right)^{10} < \left(\frac{1}{64}\right)^{10}$, to je $4^{-30} > 3^{-40}$.

c) $\left(\frac{1}{27}\right)^{17} = \ldots = \left(\frac{1}{3}\right)^{51}$, $\left(\frac{1}{81}\right)^{13} = \left(\frac{1}{3}\right)^{52}$, i pošto je $\left(\frac{1}{3}\right)^{51} > \left(\frac{1}{3}\right)^{52}$, to je $\left(\frac{1}{27}\right)^{17} > \left(\frac{1}{81}\right)^{13}$.

10.28. a) Prilikom prelaska sa k na $k+1$ posmatrati odnos $6k > 2(k+1)$.

b) $3^n = (2+1)^n = \binom{n}{0} \cdot 2^n + \ldots > n \cdot 2$ (vidjeti, po potrebi, primjer 3.6).

10.29. *Uputa*: Pri množenju nejednakosti $2^{k+2} > 2k+5$, $k \geqslant 1$ brojem 2, uočiti da je $4k+10 = [2(k+1)+5] + (2k+3) > 2(k+1)+5$.

10.30. Izvođenjem naznačenih operacija posmatrana formula se svodi na ekvivalentnu a tačnu formulu $(bx - ay)^2 \geqslant 0$.

10.31. Raditi pomoću matematičke indukcije.

10.32. Formula a) slijedi iz Bernulijeve formule (vidjeti prethodni zadatak).

b) Prema formuli a) je $(1-h)^n > 1 - nh$, a kako je $h < \frac{1}{n}$, to je $1 - nh > 0$, pa za recipročne vrijednosti imamo:

$$\frac{1}{1-nh} > \frac{1}{(1-h)^n}.$$

Osim toga je $\frac{1}{(1-h)^n} > (1+h)^n$, jer je $(1-h^2)^n < 1$.

10.33. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1 = [(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]+1 =$
$= (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1 = [(x^2-5x+5)-1][(x^2-5x+5)+1]+1 = \ldots =$
$= (x^2-5x+5)^2 \geqslant 0$.

10.34. Dio a) zadatka je specijalan slučaj dijela b) zadatka (za $n=3$), pa dokažimo dio b):
$a^{n+1} - a^n b + b^{n+1} - ab^n = a^n(a-b) - b^n(a-b) = (a-b)(a^n - b^n) =$
$= (a-b)^2(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Zaključiti sada da ovaj izraz nije negativan itd.

10.35. *Uputa*: Koristiti se matematičkom indukcijom i nejednakošću b) iz prethodnog zadatka.

10.36. 1° Za $x = 1$ u formuli važi jednakost;

2° za $x > 1$ treba podijeliti datu formulu sa $x-1$, pa jednom sve stepene x^i, $i = 0,1,\ldots,n-1$ zamijeniti sa 1, a drugi put sa x^{n-1}.

10.37. Treba se koristiti očigledno tačnom nejednakošću

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0.$$

10.38. $abc(a+b+c) = \ldots = (ab)\cdot(ac) + (ba)\cdot(bc) + (ca)\cdot(cb) \overset{(1)}{\leqslant}$
$\overset{(1)}{\leqslant} \frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2} + \ldots = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \overset{(1)}{\leqslant} \frac{a^4+b^4}{2} + \ldots = a^4 + b^4 + c^4$. Na mjestima (1) primjenjuje se odnos između aritmetičke i geometrijske sredine.

10.39. Pri dokazivanju formule a) primijeniti odnos između aritmetičke i geometrijske sredine. Lijeva nejednakost u b) se dobije međusobnim množenjem nejednakosti $2\sqrt{ab} \leqslant a+b$, $2\sqrt{bc} \leqslant b+c$, $2\sqrt{ca} \leqslant c+a$ koje su posljedice odnosa $A \leqslant G$. Pri dokazu desne nejednakosti iskoristiti nejednakost a) i sljedeću nejednakost

$$x^2y + xy^2 \leqslant x^3 + y^3.$$

Za dokaz desne nejednakosti c) iskoristiti identitet

i formulu b). $$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

10.40. a) Prvu nejednakost $a < b + c$ zamijeniti njenom posljedicom $a^2 < a(b+c)$, a tako i ostale dvije nejednakosti. U zadatku b) prvu nejednakost zamijeniti posljedicom $a^3 < a^2(b+c)$, itd.

10.41.* Formula a) je specijalan slučaj formule b), a za dokaz formule b) staviti

$$a = \frac{1}{2} + x,\ b = \frac{1}{2} - x,$$

pa zatim primijeniti binomnu formulu (vidjeti primjer 3.6).

10.42. $$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{3}\left[a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2)\right] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{3}\left[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\right] = \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}.$$

Ovdje smo se koristili nejednakošću iz zadatka 10.37.

10.43. Prema teoremi 10.2. imamo:

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \ldots = 2 \text{ itd.}$$

10.44. Za sabirke na lijevoj strani nejednakosti primijeniti odnos između aritmetičke i geometrijske sredine.

10.45. *Uputa*: Prvo skratiti razlomak $\frac{a^n - b^n}{a-b}$, pa u dobijenom izrazu jednom svugdje staviti a, a drugi put b.

10.46. Primijeniti odnos između aritmetičke i harmonijske sredine.

10.47. Vidjeti uputu za prethodni zadatak.

10.48.* $$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) = \frac{1}{abc}(1-a)(1-b)(1-c).$$

Kako je $1 - a = b + c$, $1 - b = c + a$, $1 - c = a + b$, to je

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) = \frac{1}{abc}(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant \frac{1}{abc}\cdot 8abc = 8.$$

Ovdje je primijenjena nejednakost iz zadatka 10.39. b).

10.49. *Uputa*: pomnožiti nejednakost sa $(1+|a+b|)(1+|a|)(1+|b|)$. Nakon sređivanja dobije se nejednakost

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b|$$

koja je tačna, jer je $|a+b| \leqslant |a| + |b|$.

10.50. Kvadriranjem posmatrane nejednakosti dobije se nejednakost

$$ad + bc \geqslant 2\sqrt{abcd},$$

a sada pogledati teoremu 10.2.

10.51. Iz odnosa $\sqrt{(4a+1)\cdot 1} \leqslant \frac{(4a+1)+1}{2}$ i slično za ostale korijene, sabiranjem dobijenih nejednakosti dobije se da je

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leqslant 2(a+b+c) + 3,$$

itd. Kada vrijedi znak jednakosti?

10.52. $a^n - 2a + 1 = a^n - a - (a-1) = \ldots = (a-1)(a^{n-1} + \ldots + a^2 + a - 1) = 0.$
Kako je $a - 1 \neq 0$, slijedi jednakost

(1) $$a^{n-1} + \ldots + a^2 + a = 1.$$

Pošto je $0 < a \neq 1$, to je $a^i > 0$ i $a^i \neq a^j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$ $(i \neq j)$, iz odnosa $A \geqslant G$ i jednakosti (1) slijedi formula

$$\frac{1}{n-1} > a^{\frac{n}{2}}, \text{ odnosno } a < \frac{1}{\sqrt[n]{(n-1)^2}}.$$

10.53.* Neka je $p = \frac{m}{n}$, $m, n \in N$, $m > n$, pa imamo:

$$\sqrt[m]{\underbrace{\left(1+\frac{m}{n}x\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{m}{n}x\right)}_{n\text{ puta}}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{m-n\text{ puta}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(1+\frac{m}{n}x\right)+\ldots+\left(1+\frac{m}{n}x\right)+(m-n)\cdot 1}{m} =$$

$$= \frac{n\left(1+\frac{m}{n}x\right)+m-n}{m} = \frac{m+mx}{m} = 1+x.$$

Prema tome,

$$\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant 1+x.$$

Odatle slijedi

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \geqslant \left(1+\frac{m}{n}x\right), \text{ tj.}$$

$$(1+x)^r \geqslant 1+px.$$

10.54. *Prvi način.* Pomnožiti međusobno sljedeće nejednakosti:

$$\sqrt{1\cdot n} < \frac{1+n}{2},$$

$$\sqrt{2\cdot(n-1)} \leqslant \frac{2+(n-1)}{2} = \frac{1+n}{2},$$

$$\ldots$$

$$\sqrt{n\cdot 1} < \frac{1+n}{2}.$$

Drugi način.

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} < \ldots = \ldots = \frac{n+1}{2} \Rightarrow 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \Rightarrow n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

10.55. *Uputa*: primijeniti odnos između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve $1^2, 2^2, \ldots, n^2$.

10.56.* Proizvod $1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot\ldots\cdot n^n$ možemo pisati u obliku

$$1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{n\text{ puta}}\cdot$$

Pokazati da je broj faktora u ovom proizvodu jednak $\frac{n(n+1)}{2}$. Pokazati, dalje, na osnovu zadatka 10.55, da je aritmetička sredina ovih faktora jednaka $\frac{2n+1}{3}$. Pokazati, najzad, da iz odnosa $A \leqslant G$ slijedi desna nejednakost u zadatku.

Lijeva nejednakost slijedi iz odnosa $H \leqslant G$.

10.57. Pošto je $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$, $\ldots$, $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, $\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$, to, sabirajući ove nejednakosti, dobijemo:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n} > n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

10.58. a) Iz tačne nejednakosti

(1) $$(\forall\, x, a_i, b_i \in R)\ \sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 \geqslant 0$$

slijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 x^2 + 2a_i b_i + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geqslant 0.$$

Dobili smo kvadratni trinom po varijabli x koji, prema (1) nema negativnu vrijednost ni za jedan $x \in R$, pa njegova diskriminanta mora biti manja ili jednaka 0, a iz toga uslova slijedi posmatrana nejednakost. Kako u (1) vrijedi znak jednakosti za neko $x \in R$ ako i samo ako je, za to x, $a_i x + b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tj.

$$a_1 : b_1 = \ldots = a_n : b_n,$$

upravo tada vrijedi znak jednakosti i u nejednakosti Koši — Bunjakovskog.

b) Rješenje ovog zadatka slijedi iz tvrdnje prethodnog zadatka.

10.59. Za $n \geqslant j > i \geqslant 1$ imamo:

$$(a_j - a_i \geqslant 0 \wedge b_j - b_i \geqslant 0) \Rightarrow (a_j - a_i)(b_j - b_i) \geqslant 0 \Rightarrow a_j b_j + a_i b_i \geqslant a_j b_i + a_i b_j.$$

Sabiranjem svih ovih nejednakosti i n jednakosti $a_i b_i = a_i b_i$, dobije se tražena nejednakost.

10.60. a) Primijeniti odnos $A \geqslant G$.

b) Ova formula slijedi iz formule a), jer je

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_1} = 1.$$

10.61. Ako sa y označimo mjerni broj visine konusa, tada je zapremina konusa $V = \frac{\pi}{3} y^2 (2r - y)$, a da bi se mogla primijeniti teorema 10.3. a), pišemo

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot \left[\frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot (2r - y) \right].$$

Vrijednost izraza za V je najveća kada je najveća vrijednost izraza u srednjoj zagradi. Pošto je $\frac{y}{2} + \frac{y}{2} + (2r - y) = 2r$, tj. pošto je taj zbir konstantan, zapremina je najveća kada je $\frac{y}{2} \left(= \frac{y}{2} \right) = 2r - y$. Dobije se da je

$$y = \frac{4}{3} r, \quad x = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

10.62. Ako sa x označimo radijus osnove valjka, a sa y njegovu visinu, tada se izraz za zapreminu valjka može napisati u obliku $2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$. Zapremina V je najveća kada i V^2 i obrnuto. Napišemo li da je

$$V^2 = 16\pi^2 \left[\frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} (r^2 - x^2) \right],$$

možemo primijeniti teoremu 10.3. a) (posmatrajući izraz u srednjoj zagradi — vidjeti prethodni zadatak). Dobije se da je

$$x = r\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

10.63. Ako sa x označimo radijus osnove, a sa y visinu valjka, tada, prema slici 10.3, dobijemo

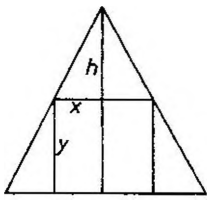
$$y = \frac{h(r - x)}{r},$$

pa se za zapreminu valjka može pisati

$$V = \frac{\pi h}{r} x^2 (r - x) = \frac{\pi h}{r} \cdot 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (r - x).$$

Rasuđujući kao u prethodnom zadatku, dobijemo da je

$$x = \frac{2}{3} r, \quad y = \frac{1}{3} h.$$



Sl. 10.3.

10.64. Pošto je

$$\sum_{i=1}^{n} (x - a_i^2)^2 = nx^2 - \left(2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot x + \sum_{i=1}^{n} a_i^4,$$

i $n > 0$, kvadratni trinom ima minimum, i to za vrijednost

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}.$$

Kako je proizvod $\prod_{i=1}^{n} a_i$ konstantan, to je konstantan i proizvod $\prod_{i=1}^{n} a_i^2$, i pošto je $a_i^2 > 0$, može se primijeniti teorema 10.3. b).

Zato izraz $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}$ ima najmanju vrijednost ako je $a_1^2 = a_2^2 = \ldots = a_n^2$. Tada je

$$x = \frac{na_1^2}{n} = a_1^2.$$

10.65. Interval (1, 8) pripada definicionom području funkcije f, čiji se izraz može napisati ovako:

$$f(x) = \log_2^2 x(\log_2^2 x + 9 - 6 \log_2 x).$$

Stavimo li da je $\log_2 x = z$, dobijemo:

$$z^2(z-3)^2 = z^2(3-z)^2 = z \cdot z \cdot (3-z)(3-z).$$

Pokazati sada da je $z > 0$ i $3 - z > 0$ ako $z \in (1,8)$ i da se može primijeniti teorema 10.3. a). Dobije se da je

$$x = \sqrt{8}, f(\sqrt{8}) = \frac{81}{16}.$$

Napominjemo da je ovaj problem riješen na drugi način u zadatku 18.12.*

11. KOMPLEKSNI BROJEVI

11.1. KOMPLEKSNI BROJEVI U OBLIKU PAROVA I U ALGEBARSKOM OBLIKU

11.1. *Rješenje*: a) $(2+3i)+(-4-2i)=(2-4)+(3-2)i=-2+i$.

b) $(7-4i)-\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}i\right)=\left(7-\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{2}{3}\right)i=\frac{11}{2}-\frac{14}{3}i$.

c) $\left(\frac{1}{3}-2i\right)\left(3+\frac{1}{4}i\right)=1-\frac{1}{2}i^2+\frac{1}{12}i-6i=\frac{3}{2}-\frac{71}{12}i$.

d) $(2-3i):(1+i)=\frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-3i-2i+3i^2}{1^2-i^2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$.

11.3. Poći od jednakosti $(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2$.

11.4. a) Uočiti da je $i^4=1$ i da je, za $n\geq 4$, $n=4k+r$, $k\in N$, $r\in\{0,1,3\}$.

b) $i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot(-i)=-i$, $i^{13}=(i^4)^3\cdot i=i$, itd.

11.5. a) $(1+i)^6=[(1+i)^2]^3=(2i)^3=-8i$.

Može se raditi, mada je to opširnije, pomoću binomne formule (vidjeti primjer 3.6).

11.6. Zadatak se svodi na rješavanje sistema jednačina

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=2\wedge y=1,$$

odnosno na rješavanje iracionalne jednačine

$$\sqrt{x^2+1}+x=2.$$

Traženi broj je

$$z=\frac{3}{4}+i.$$

11.7. Ako označimo $z=x+yi$, jednakost $\bar{z}=z^3$ ekvivalentna je (na osnovu definicije jednakosti dva kompleksna broja) sistemu

$$x=x^3-3xy^2\wedge -y=3x^2y-y^3.$$

Rješenja sistema su parovi $(-1,0),(1,0),(0,0),(0,-1),(0,1)$. Zato je $z_1=-1$, $z_2=1$, $z_3=0$, $z_4=-i$, $z_5=i$.

11.8. Prvo pokazati da je $\frac{z-1}{z+1}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}i$, $(x\neq\pm 1\vee y\neq 0)$.

11.9. *Rješenje*: Neka je $z=x+iy$. Tada iz $|z|=2$ slijedi

$$x^2+y^2=4.$$

Sada imamo

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|x+iy-\frac{1}{x+iy}\right|=\left|x+iy-\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right|=\ldots=\left|\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}iy\right|=\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{9}{16}(4-y^2)+\frac{25}{16}y^2}=\sqrt{y^2+\frac{9}{4}}.$$

Prema tome je

$$\min\left\{\left|z-\frac{1}{z}\right| : |z|=2,\ z\in C\right\} = \min\left\{\sqrt{y^2+\frac{9}{4}} : y\in R,\ x^2+y^2=4\right\} = \frac{3}{2};$$ vrijednost 3/2 dobije se za $y=0$.

Odavde slijedi da je $x = \pm 2$, odnosno najmanja vrijednost datog izraza postiže se za $z=-2$ i $z=2$.

11.10. Prema slici 11.2. je

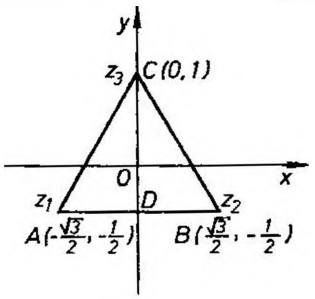
$$d(\overline{CD}) = \frac{3}{2}d(\overline{OC}) = \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{d(\overline{AB})}{2}\sqrt{3}, \text{ pa se}$$

dobije $d(\overline{AB}) = \sqrt{3}$.

Dobije se:

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,\ z_3 = i.$$

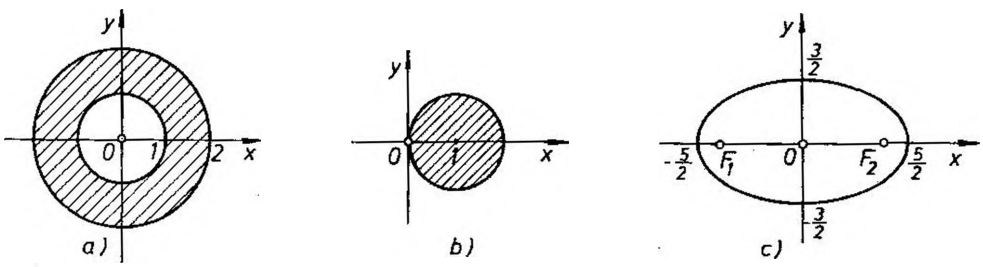


Sl. 11.2.

11.11. U slučaju a) vrhu iz prvog kvadranta odgovara kompleksni broj $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11.12. a) Formuli $\sqrt{x^2+y^2} = 1$, odnosno $x^2+y^2=1$, odgovara manja kružnica na sl. 11.3. a). Formule $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$ opisuju kružni prsten prikazan na slici 11.3. a)

b) U ovom slučaju se dobije formula $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$ koja opisuje krug prikazan na slici 11.3. b).



Sl. 11.3.

c) Dobije se jednačina elipse $36x^2+100y^2=225$, tj.

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1 \text{ (sl. 11.3.c.)}.$$

Uostalom, iz jednakosti $|z-2|+|z+2|=5$ vidi se odmah da se radi o elipsi sa fokusima $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ i velikom osom $2a=5$. Kako je $a=\frac{5}{2}$, a linearni ekscentricitet $e=2$, to je

$$b = \sqrt{a^2-e^2} = \sqrt{\frac{25}{4}-4} = \frac{3}{2}.$$

11.13. Ako uvedemo oznaku $z_1 = X + Yi$, tada se dobije da je

$$X = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2},\ Y = \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}.$$

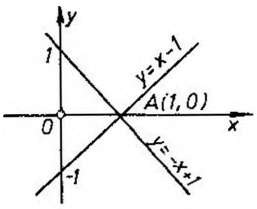
Odavde se, uz uslov da je $y = -x + 1$, dobije

$$X = \frac{x}{x-1}, \quad Y = \frac{1}{x-1},$$

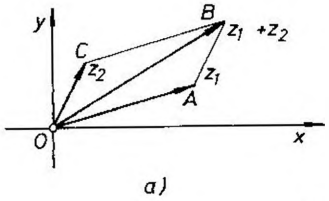
a odavde slijedi jednačina $Y = X - 1$. Ako sada umjesto X i Y pišemo x i y, vidimo da tačka N opisuje pravu

$$y = x - 1$$

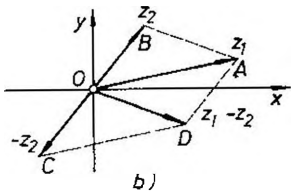
koja je okomita na pravoj $y = -x + 1$, izuzev tačku $A(1,0)$ (sl. 11.4).



Sl. 11.4.



a)



b)

Sl. 11.5.

11.14. a) 1° Prema slici 11.5. a) u trouglu ΔOAB je $|\vec{OA}| + |\vec{AB}| > |\vec{CB}|$, pa je

$$|z_1| + |z_2| > |z_1 + z_2|.$$

Ova je nejednakost tačna i za kolinearne vektore $\vec{OA}$ i $\vec{OC}$ ako oni imaju suprotan smjer. Ako su istog smjera, tada važi jednakost. Prema tome, uvijek je

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2|.$$

2° Ako označimo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, tada za apsolutne vrijednosti brojeva z_1 i z_2 vrijedi:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geqslant \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \geqslant ac + bd. \tag{1}$$

Ako je $ac + bd < 0$, tada je formula (1) tačna. Ako je $ac + bd \geqslant 0$, tada se kvadriranjem formule (1) i sređivanjem dobije formula

$$(ad - bc)^2 \geqslant 0.$$

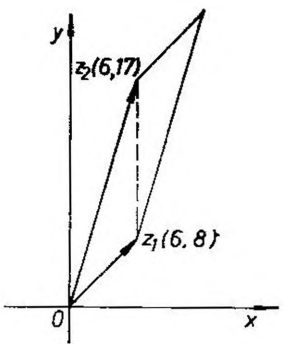
Posljednja formula je, međutim, tačna, jer je $(ad - bc) \in R$.

b) Ako stavimo $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, tada treba dokazati da je

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \geqslant |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}|.$$

Posmatrati sliku 11.5. b) na kojoj je, očito, $|\vec{OD}| \geqslant ||\vec{OA}| - |\vec{DA}||$. Kada važi jednakost?

11.15. $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 6 + 17i$,
$P = 54$ (sl. 11.6).



Sl. 11.6.

11.16. Prema definiciji 11.1. vidimo da je skup C zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja. Te operacije izvodimo kao kada sabiramo i množimo binome u skupu R, samo kod množenja umjesto i^2 pišemo -1. Zato su te operacije komutativne i asocijativne, a množenje je distributivno prema sabiranju.

Odredimo neutralne elemente:

$(a + bi) + (x + yi) = a + bi,$

$(a + x) + (b + y)i = a + bi,$

$(a + x = a \wedge b + y = b) \Leftrightarrow x = y = 0.$

Iz

$(a + bi)(x + yi) = a + bi,$

slijedi $x = 1$, $y = 0$.

Neutralni element za sabiranje je, dakle, broj 0, a za množenje broj 1.

Za inverzne elemente imamo:

$(a + bi) + (x + yi) = 0 \Leftrightarrow x = -a \wedge y = -b.$

Inverzni, tj. suprotni broj broja $a + bi$ je $-a - bi$.

Ugledati se na primjer 11.1. i pokazati da za svaki $z = a + bi$, $z \neq 0$, tj. $a \neq 0$ ili $b \neq 0$, postoji recipročni broj

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Zaključujemo da je $(C, +)$ komutativna grupa $(C^*, \cdot)$, $C^* = C \setminus \{0\}$, komutativna grupa, da važi distributivnost, pa je $(C, +, \cdot)$ polje.

11.17. *Dokaz*: 1° Iz $x, y \in H$ slijedi $x \cdot y \in H$, tj. $(H, \cdot)$ je grupoid.

2° Operacija množenja kompleksnih brojeva je asocijativna.

3° Neutralni element je $1 (\in H)$, jer je

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad (\forall\, x \in H).$$

4° Za svaki element $x \in H$, postoji element $x' \in H$ tako da važi

Naime,

$$x' = x^{-1} = \frac{1}{x} = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ -1, & x = -1, \\ -i, & x = i, \\ i, & x = -i. \end{cases}$$

Slijedi da za svaki element $x \in H$, postoji inverzni element $x \in H$.

Dakle, $(H, \cdot)$ je grupa.

Napomenimo da je $(H, \cdot)$ Abelova grupa, jer je množenje kompleksnih brojeva komutativna operacija.

11.18. Pri ispitivanju zatvorenosti skupa S treba, na osnovu jednakosti $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z_2| = \sqrt{c^2 + d^2} = 1$, dokazati tačnost jednakosti $|z_1 \cdot z_2| = 1$. Neutralni element je 1. a inverzni element elementa $a + bi$ je $a - bi$.

11.2. KOMPLEKSNI BROJEVI U TRIGONOMETRIJSKOM I EKSPONENCIJALNOM OBLIKU

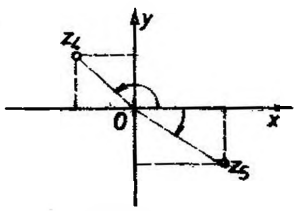
11.19. *Rješenje*: Prema formuli (11.11) je

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{2}, \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}, \arg z_3 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arg z_4 = \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{-1} = \pi - \operatorname{arctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

$$\arg z_5 = \operatorname{arctg}\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} \text{ (sl. 11. 7).}$$

Izračunati tražene argumentacije i po definiciji, tj. prema formulama (11.8).



Sl. 11.7.

11.20. a) Kako je

$r = |1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$, $\varphi = \arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, to, prema (11.9), trigonometrijski oblik broja $z = 1 - i\sqrt{3}$ je $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Eksponencijalni oblik broja z je (prema (11.10))

$$z = 2e^{-i\pi/3}.$$

b) Treba prvo odrediti komponente $\mathrm{Re}(z)$ i $\mathrm{I_m}(z)$ datog broja z (vidjeti primjer 11.1), a zatim postupiti kao pod a).

Dobija se:

$$\frac{1-3i}{i+1} - \frac{i}{i+2} = -\frac{6}{5} - \frac{12}{5}i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

gdje je $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg} 2$.

11.21. a)

$$z = \begin{cases} 0, & \alpha = 2k\pi, \quad (k \in Z) \\ 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| e^{i\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2})}, & \alpha \neq 2k\pi. \end{cases}$$

b) $z = \frac{1}{|\cos\alpha|} e^{i\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)}, (\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z).$

(Npr., za $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ je $z = \frac{1}{\cos\alpha} e^{i\alpha}$, a za

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ je $z = -\frac{1}{\cos\alpha} e^{i(\alpha-\pi)}$.)

c) $z = e^{2\alpha i} (\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z).$

11.22. a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$z_3 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_4 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

b) $z_1^{16} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{16} = 2^8(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 256$

(ili $z_1^{16} = (1+i)^{16} = ((1+i)^2)^8 = (2i)^8 = 256(i^2)^4 = 256$,
a može i po binomnoj formuli ali je predugo).

$z_2^{20} = \ldots = -2^{10}$, $z_3^{15} = \ldots = 2^{15}$, $z_4^{15} = \ldots = 2^{15}$.

c) $z_1 \cdot z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \ldots =$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \ldots = -1 - \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)i$

(u ovom slučaju je kraće naći $z_1 \cdot z_3$ množeći njihove algebarske oblike).

$$\frac{z_4}{z_2} = \ldots = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

(i ovdje je brže izvršiti dijeljenje algebarskih oblika).

d) $z_1^3 \cdot z_2^6 = (1+i)^3 \cdot (1-i)^6 = (1+i)^2(1+i)[(1-i)^2]^3 = \ldots = -2^4(1+i)$

(izvršiti izračunavanje koristeći trigonometrijski oblik).

$$\frac{z_3^{15}}{z_2^{20}} + \frac{z_4^{15}}{z_1^{20}} = \frac{2^{15}}{-2^{10}} + \frac{2^{15}}{(1+i)^{20}} = -2^5 + \frac{2^{15}}{(2i)^{10}} = -2^5 + \frac{2^5}{i^2} = -2^6.$$

11.23. *Rješenje:* Iz $z = \alpha + \sqrt{-(\alpha^2 - 1)} = \alpha \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}$ i $\mathrm{Im}(z) > 0$ $\left(\text{jer je } \arg z = \frac{\pi}{6}\right)$ slijedi $z = \alpha + i\sqrt{\alpha^2 - 1}$. Kako je i $\mathrm{Re}(z) > 0$ (jer je $\mathrm{Re}(z) = \alpha > 1$), to imamo $\arg z = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}$, s jedne strane, a s druge strane je $\arg z = \frac{\pi}{6}$ (po pretpostavci u zadatku). Prema tome, imamo

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

tj. $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

11.24. *Rješenje: Prvi način.*

Neka je $z = x + iy (x, y \in R)$. Tada je $|1 + z| = \sqrt{(1 + x)^2 + y^2}$. $\arg(1 + z) = \arg((1 + x) + iy)$. Na osnovu pretpostavke u zadatku, broj $1 + z$ je u prvom kvadrantu, pa je $\mathrm{Re}(1 + z) > 0$, tj. $1 + x > 0$, i $\arg(1 + x + iy) = \mathrm{arctg}\frac{y}{1 + x}$. Otuda dobijemo sistem jednačina

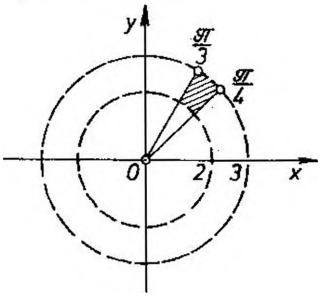
$$\sqrt{(1 + x)^2 + y^2} = 4, \frac{y}{1 + x} = 1, (1 + x > 0),$$

čije je rješenje $x = -1 + 2\sqrt{2}$, $y = 2\sqrt{2}$. Dakle, $z = -1 + 2\sqrt{2}(1 + i)$.

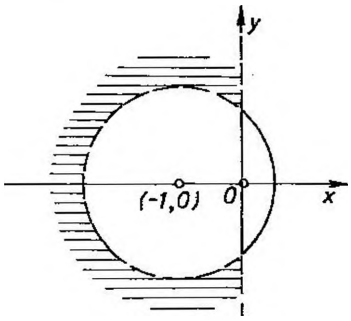
Drugi način.

$$\left[\arg(1 + z) = \frac{\pi}{4} \wedge |1 + z| = 4\right] \Rightarrow 1 + z = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \Rightarrow z =$$
$$= -1 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i.$$

11.25. a) Tražene tačke su sve tačke oblasti između kružnica $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ i polupravih $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (tj. u šrafiranom dijelu na sl. 11.8), isključujući tačke na ovim kružnicama.



Sl. 11.8.



Sl. 11.9.

b) Ako stavimo $z = x + iy$, onda je data nejednakost ekvivalentna sa

$$0 < \arg\frac{x^2 + y^2 - 1 - 2ix}{x^2 + (y + 1)^2} < \frac{\pi}{4}, \quad (x + iy \neq i),$$

odnosno sa

$$0 < \mathrm{arctg}\frac{-2x}{x^2 + y^2 - 1} < \frac{\pi}{4},$$

tj. sa $0 < \frac{-2x}{x^2 + y^2 - 1} < 1$, $(x^2 + y^2 - 1 > 0)$.

Posljednje nejednačine su ekvivalentne sa $x < 0$ i $(x + 1)^2 + y^2 > 2$, što određuje traženi skup tačaka (šrafirani dio na slici 11.9, isključujući tačke na osi y i kružnici).

11.26. Prema Moavrovoj formuli (11.12) je

$$\cos nx + i\sin nx = (\cos x + i\sin x)^n.$$

Ako desnu stranu ove jednakosti razvijemo po binomnoj formuli i izjednačimo realne i imaginarne dijelove s jedne i druge strane, dobijemo date jednakosti.

11.27. a) Iz (*) slijedi $z^2 - 2\cos\alpha \cdot z + 1 = 0$, tj.

$$z = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha.$$

Primjenom Moavrove formule, dobije se $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos(n\alpha)$.

b)* Iz $S = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi}$ slijedi $S = e^{i\varphi}(1 + e^{i\varphi} + \ldots + e^{i(n-1)\varphi}) =$

$$= e^{i\varphi}\frac{1 - e^{in\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\frac{1 - \cos n\varphi - i\sin n\varphi}{(1 - \cos\varphi) - i\sin\varphi} =$$

$$= \ldots = \frac{\cos\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} + i\sin\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

i

$$S = \sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi + i\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi$$

slijedi

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi = \frac{\cos\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

11.28. 1° Prema Moavrovoj formuli je $\cos 5x + i\sin 5x = (\cos x + i\sin x)^5$, a, dalje, prema binomnoj formuli imamo

$$\cos 5x + i\sin 5x = \cos^5 x + 5\cos^4 x\cdot(i\sin x) - \binom{5}{2}\cos^3 x\sin^2 x - \binom{5}{3}\cos^2 x(i\sin^3 x) +$$

$$+ \binom{5}{4}\cos x\sin^4 x + i\sin^5 x,$$

odakle je

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x,$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x.$$

2° Polazeći od identiteta

$$[(\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi)]^5 = 2^5\cos^5\varphi,$$
$$[(\cos\varphi + i\sin\varphi) - (\cos\varphi - i\sin\varphi)]^5 = (2i)^5\sin^5\varphi,$$

i razvijajući lijeve strane ovih jednakosti po binomnoj formuli, uz primjenu Moavrove formule na pojedine članove dobijenog razvoja, dobićemo

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(10\cos x + 5\cos 3x + \cos 5x),$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(11\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x).$$

11.29. 1° Za n-te korijene iz 1 dobijemo izraz

$$(1) \qquad \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad (k = 0,1,\ldots,n-1),$$

koji ćemo označavati sa ε_k. Svih n vrijednosti od $\sqrt[n]{1}$ nalaze se na kružnici s centrom u O i polupročnikom 1, i vrhovi su pravilnog n-ugla upisanog u tu kružnicu, čiji jedan vrh, ε_0, leži uvijek na osi Ox. Vrijednosti od $\sqrt[n]{1}$ zovu se **n-ti korijeni jedinice.** ε_k ima za sve n jednu realnu vrijednost $\varepsilon_0 = 1$, a ako je n paran on ima još jednu realnu vrijednost za $k = \frac{n}{2}$ koja je jednaka -1.

Za n-te korijene iz (-1) dobijemo izraz

$$(2) \qquad \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{n}, \quad (k = 0,1,\ldots,n-1),$$

koji ćemo označiti sa w_k.
Razvijajući izraz (2), dobiće se

$$(3) \qquad w_k = \varepsilon_k\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right), \quad (k = 0, \quad 1,\ldots,n-1).$$

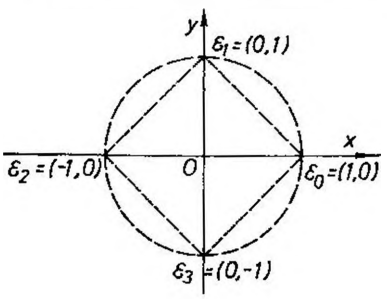
Uopšte je $\sqrt[n]{z} = \varepsilon_k \cdot w$ $(k = 0, 1, 2,\ldots,n-1)$, gdje je w bilo koja vrijednost $\sqrt[n]{z}$. To se dobije ovako: $X^n - z = 0 \Leftrightarrow X^n - w^n = 0 \Leftrightarrow (X \cdot w^{-1})^n = 1 \Leftrightarrow X \cdot w^{-1} = \varepsilon_k \Leftrightarrow X = \varepsilon_k \cdot w$.

2°. Iz (1) je

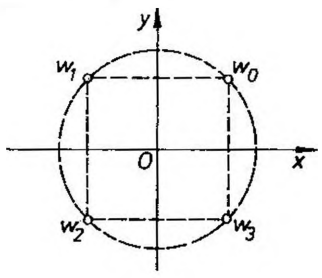
$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = i, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = -i\,(= \overline{\varepsilon_1})$, (v. sl. 11.10).

Iz (2) ili iz (3) je

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad w_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad w_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \qquad \text{(v. sl. 11.11).}$$



Sl. 11.10.



Sl. 11.11.

3° Prema (1) rješenja jednačine $x^5 - 1 = 0$ data su formulom

$$\sqrt[5]{1} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

odakle se dobije faktorizacija

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right).$$

11.30. a) $x_k = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \quad (k = 0, 1, 2),$

tj. $x_0 = 2$, $x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}$, (riješiti datu jednačinu i rastavljajući $x^3 - 8$ na faktore).

b) $x = \sqrt[6]{-64} = 2\sqrt[6]{-1} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right),$

$(k = 0, 1,\ldots,5)$; $x_0 = \sqrt{3} + i$, $x_1 = 2i$, $x_2 = -\sqrt{3} + i$,

$x_3 = -\sqrt{3} - i$, $x_4 = -2i$, $x_5 = \sqrt{3} - i$.

c) $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}$,

$z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{17\pi}{12}i} (= -\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}i})$.

d) $x = k\pi, \quad k \in Z$.

11.31. a) Nakon pojednostavljenja, dobije se jednačina $z^3 = 1$, čija su rješenja

$$z_0 = 1, \; z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

b) Iz $(1-i)^5 = ((1-i)^2)^2(1-i) = (-2i)^2(1-i) = -4(1-i)$ slijedi $\mathrm{Re}\{(1-i)^5\} = -4$, pa se data jednačina svodi na jednačinu $(z+1)^4 = 2$.

Dakle, tražene vrijednosti za z su:

$$z = -1 + \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

tj.

$z_0 = -1 + \sqrt[4]{2}$, $z_1 = -1 + i\sqrt[4]{2}$, $z_2 = -1 - \sqrt[4]{2}$, $z_3 = -1 - i\sqrt[4]{2}$.

11.32. a) $x_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right), \quad (k = 0, 1, 2).$

b) $\pm 2(\sqrt{3} + i)$, $\pm 2(-1 + i\sqrt{3})$.

c)* Predstaviti z u obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pa iskoristiti relaciju

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = \frac{|z^2 + 1|}{r} = 1.$$

Dobije se da je najveća vrijednost od z $\left(\text{uz uslov } \left|z + \frac{1}{z}\right| = 1\right)$ jednaka $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, i da je $|z|$ uzima za $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in Z)$, pa je rješenje:

$$x_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \; x_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Naime,

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow |r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + 1|^2 = r^2 \Leftrightarrow |r^2 + (\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi)|^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^4 + (2\cos 2\varphi - 1)r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2_{1,2} = \frac{1}{2} - \cos 2\varphi \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2 2\varphi - 4\cos 2\varphi - 3};$$

$$4\cos^2 2\varphi - 4\cos 2\varphi - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos 2\varphi < -\frac{1}{2} \text{ ili } \cos^2\varphi > \frac{1}{2}.$$

Očigledno se maksimalna vrijednost za r dostiže kada je

$$r^2 = \frac{1}{2} - \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{4\cos^2 2\varphi - 4\cos 2\varphi - 3}$$

i pri tome $\cos 2\varphi < 0$ i najmanje, tj. za

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Otuda

$$r^2_{\max} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

tj.

$$r_{\max} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

12. LINEARNE JEDNAČINE I SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

12.1. EKVIVALENTNOST JEDNAČINA. LINEARNE JEDNAČINE

12.1. Obje jednačine imaju u skupu R realnih brojeva isto rješenje $x = 1$, pa su ekvivalentne. U skupu C za drugu jednačinu imamo:

$$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 1 \vee x = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

pa jednačine u tome skupu nisu ekvivalentne.

12.2. Za zadatak b) vidjeti teoremu 12.2.

12.3. a) Za rješenje $x = 1$ druge jednačine prva jednačina nije definisana. Ima li prva jednačina uopšte rješenja? Za zadatak b) vidjeti teoremu 12.1, a za zadatke c) i d) teoremu 12.2.

12.4. a) Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$(100 - m^2)x = 5(10 + m),$$

a ova jednačina je određena za sve realne vrijednosti $m \neq \pm 10$.

b) $m \neq \pm 4$.

12.5. Data jednačina se može svesti na oblik

$$(a-2)^2 x = -(a-2).$$

Vidi se da ona ne može biti protivrječna ni za koju vrijednost parametra a (jer ne može biti istovremeno $(a-2)^2 = 0$ i $-(a-2) \neq 0$.

12.6. Data jednačina definisana je na skupu $D = R \setminus \{-2, 2\}$ i na tome skupu ona je ekvivalentna jednačini $-3x - 6 = 0$, koja ima rješenje $x = 2$. Pošto $2 \notin D$, data jednačina nema rješenja.

12.7. 1° Ako je $a^2 \neq b^2$, tj. $|a| \neq |b|$, odnosno $a \neq \pm b$, tada je $x = \dfrac{1}{a+b}$.

2° Ako je $a = b$, tada je x proizvoljan realan broj.

3° Ako je $a = -b$, tada imamo jednačinu

$$0 \cdot x = 2a.$$

Ako je $a = 0$, x je proizvoljan; a ako je $a \neq 0$, jednačina nema rješenja.

12.8. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$2(a+1)(a^2 - a + 1)x = 3(a^2 - a + 1).$$

1° Ako je $a \neq -1$, rješenje je $x = \dfrac{3}{2(a+1)}$,

2° Ako je $a = -1$, jednačina nema rješenja. (Uočiti da je $a^2 - a + 1 \neq 0$ za sve vrijednosti $a \in R$).

12.9. Nulama $x = -2$ i $x = 1$ izraza $x + 2$ i $x - 1$ podijeljen je skup R realnih brojeva na ova tri razmaka (intervala):

$$(-\infty, -2),\ [-2, 1)\ \text{i}\ [1, +\infty),$$

i rješenja date jednačine treba potražiti posebno u svakom od ova tri intervala.

1° U intervalu $(-\infty, -2)$ data jednačina ima oblik

$$-(x-1)+(x+2)=1,\ 3=1,$$

što je netačno. Zato data jednačina u ovom intervalu nema rješenja.

2° Ako $x\in[-2, 1)$, data jednačina ima oblik

$$-(x-1)-(x+2)=1, \text{ tj. } x=-1.$$

Pošto $-1\in[-2, 1)$, $x=-1$ je rješenje date jednačine.

3° Na isti način se uviđa da data jednačina nema rješenja u intervalu $[1, +\infty)$.

Prema tome, data jednačina ima tačno jedno rješenje, $x=-1$.

12.10. Sređivanjem date jednačine dobije se jednačina

$$|x-3|=12x+18.$$

Radeći kao i u prethodnom zadatku, dobije se da jednačina ima tačno jedno rješenje $x=-\frac{15}{13}$ (koje je u intervalu $(-\infty, 3)$, dok u intervalu $[3, +\infty)$ ona nema rješenja).

12.11. U intervalu $(-\infty, -1)$ dobijemo da je $x=6$, ali to nije rješenje. U intervalu $\left[-1, \frac{3}{2}\right)$ imamo rješenje $x=\frac{4}{3}$, a u intervalu $[\frac{3}{2}, +\infty)$ imamo rješenje $x=2$. Skup rješenja je

$$\mathscr{R}=\left\{\frac{4}{3}, 2\right\}.$$

12.12. $x=-2$.

12.13. a) $\mathscr{R}=\{-2, 1\}$; b) $\mathscr{R}=\{0\}$; c) $\mathscr{R}=\{-2\}\cup[2, +\infty)$.

12.14. Pošto je $|3-2x|+2>0$, data jednačina ekvivalentna je jednačini $|3-2x|+2=x$, odnosno

$$|3-2x|=x-2.$$

Ako ova jednačina ima rješenja, ona moraju zadovoljavati uslov $x-2\geqslant 0$, tj.

$$x\geqslant 2. \tag{1}$$

Tada je $3-2x<0$, pa imamo jednačinu $-3+2x=x-2$, tj. $x=1$. Pošto vrijednost $x=1$ ne zadovoljava uslov (1), data jednačina nema rješenja.

12.15. 1° Ako je $x\geqslant\frac{3}{2}$, jednačina se svodi na oblik

$$|x-2|=4x-1.$$

Za $x\geqslant 2$, slijedi da je $x=-\frac{1}{3}$, ali to nije rješenje. Za $x<2$ slijedi da je $x=\frac{3}{5}$, ali ni to nije rješenje $\left(\text{jer je } \frac{3}{5}<\frac{3}{2}\right)$.

2° Ako je $x<\frac{3}{2}$, dobijemo da je $x=\frac{5}{7}$.

Rješenje jednačine je $x=\frac{5}{7}$.

12.16. 1° Ako je $x>\frac{1}{2}$, tada je $1-x<\frac{1}{2}$, pa je $f(x)=1-x$, $f(1-x)=|1-x|$. Jednačina ima oblik

$$1-x+|1-x|=1,$$

odakle, za $x\leqslant 1$ slijedi $x=\frac{1}{2}$, što otpada, a za $x>1$ slijedi da je $0=1$, pa nema rješenja.

2° Za $x<\frac{1}{2}$ jednačina također nema rješenja.

3° Za $x = \frac{1}{2}$ jednačina se svodi na tačnu brojevnu jednakost $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, pa je $x = \frac{1}{2}$ rješenje.

Rješenje jednačine je $x = \frac{1}{2}$.

12.17.* Data jednačina ekvivalentna je jednačini $|a^3 + a^2 x| + |a^2 x + 1| = 1 - a^3$, tj. jednačini

$$|a^2 x + 1| + |a^3 + a^2 x| = a^2 x + 1 - (a^3 + a^2 x). \tag{1}$$

Pošto vrijedi ekvivalencija

$$(\forall\, u, v \in R)(|u| + |v| = u - v) \Leftrightarrow (u \geqslant 0 \wedge v \leqslant 0),$$

jednačina (1) ekvivalentna je sistemu

$$\begin{aligned} a^2 x + 1 &\geqslant 0, \\ a^3 + a^2 x &\leqslant 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Za $a = 0$ sistem (2) je zadovoljen za sve vrijednosti $x \in R$, a ako je $a \neq 0$ iz sistema (2) dobijemo sistem

$$-\frac{1}{a^2} \leqslant x \wedge x \leqslant -a. \tag{3}$$

Sistem (3) ima bar jedno rješenje pod uslovom da je $-\frac{1}{a^2} \leqslant -a$, tj. da je $\frac{a^3 - 1}{a^2} \leqslant 0$, tj. da je $a \leqslant 1$ $(a \neq 0)$[1].

Za $a = 1$ iz (3) bi slijedilo $x = -1$, što ne odgovara zahtjevu zadatka. Zato ostaje u razmatranju slučaj

$$a < 1,\ a \neq 0. \tag{4}$$

Ako je $0 < a < 1$, tada je $0 > -a > -1$, pa da bi data jednačina imala najmanje četiri cjelobrojna rješenja, mora biti $-\frac{1}{a^2} \leqslant -4$, tj.

$$0 < a \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Ako je $-1 < a < 0$, tada je $1 > -a > 0$, pa će jednačina imati najmanje četiri cjelobrojna rješenja za $-\frac{1}{a^2} \leqslant -3$, tj. za

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant a < 0. \tag{6}$$

Za $a = -1$ iz (3) se dobije da je $-1 \leqslant x \leqslant 1$, pa slijedi da jednačina nema 4 cjelobrojna rješenja.

Na kraju, za $a < -1$ je $-a > 1$ i $0 > -\frac{1}{a^2} > -1$, pa će data jednačina imati najmanje 4 cjelobrojna rješenja ako je $-a \geqslant 3$, tj. ako je

$$a \leqslant -3.$$

Rezultat:

$$a \in (-\infty, -3] \cup \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

12.2. SISTEMI OD DVIJE LINEARNE JEDNAČINE SA DVIJE NEPOZNATE

12.18. Ovdje je $a_1 = 5$, $b_1 = -2$, $c_1 = 7$, $a_2 = 10$, $b_2 = 7$ i $c_2 = 3$, pa imamo:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 10 \cdot (-2) = 55,$$

[1] $\frac{a^3 - 1}{a^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow a - 1 \leqslant 0 \wedge a \neq 0$, jer je $a^2 + a + 1 > 0$ za sve vrijednosti $a \in R$.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) = 55,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 10 \cdot 7 = -55.$$

Rješenje sistema je

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{55}{55} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-55}{55} = -1.$$

12.19. Dati sistem jednačina je homogeni, i pošto je determinanta $D = 11$, tj. $D \neq 0$, sistem ima samo trivijalno rješenje (0, 0).

12.20. 1° Za $a \neq b$ i $a \neq -b$ rješenje je $x = a$, $y = -b$.

2° Za $a = b \neq 0$ jedna nepoznata je proizvoljna, ali različita od 0, a druga zavisi od nje prema jednačini $xy = -a^2$, pri čemu je $x \neq -b$ (tj. $x \neq -a$) $y \neq a$.

3° Za $a = b = 0$ nema rješenja.

12.21. Sistem ima rješenje samo u oblasti u kojoj je $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 1$, i to je par $x = 1$, $y = 2$.

12.22. a) Iz druge jednačine je $y - 1 = \frac{1}{4}|x + 1| \geqslant 0$, što znači da je $|y - 1| = y - 1$. Eliminacijom $|x + 1|$ dobije se jednačina $4y - 4 + y - 1 = 5$, odakle je $y = 2$. Sada se dobije da je $|x + 1| = 4$, odnosno $x = 3$ ili $x = -5$.

Skup rješenja sistema je $\mathscr{R} = \{(3, 2), (-5, 2)\}$.

b) $\mathscr{R} = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)\right\}$.

12.23. $a = \frac{3}{8}$, $c = -\frac{27}{8}$. Jednačina parabole je $y = \frac{3}{8}x^2 - \frac{27}{8}$.

12.24. a) *Prvi način.* Pošto je $\frac{7}{14} = \frac{9}{18} \neq \frac{5}{7}$, sistem nema rješenja.

Drugi način. Pošto je $D = 0$, $D_x = 27$, tj. $D_x \neq 0$, sistem nema rješenja.

b) Pošto je $\frac{2}{1} = \frac{-6}{-3} = \frac{10}{5} (= 2)$, sistem ima beskonačno mnogo rješenja $\mathscr{R} = \{(x, y) | x = 3y + 5, y \in R\}$. Ovdje je, naravno, $D = D_x = D_y = 0$.

12.25. $D = k^2 - 9$, $D_x = 7k - 12$, $D_y = 4k - 21$. Pošto je $D = 0$ za $k = \pm 3$, a pošto je za te vrijednosti $D_x \neq 0$ (također je $D_y \neq 0$) sistem je protivrječan za vrijednosti $k = \pm 3$.

12.26. Da bi se prave sjekle, treba i dovoljno je da je $D \neq 0$, što je ispunjeno za sve vrijednosti $k \in R$, $k \neq 7{,}5$.

12.27. *Prvi način.* a) Sistem je neodređen ako su svi odgovarajući koeficijenti proporcionalni, tj. ako postoje vrijednosti za k i m tako da je zadovoljen sistem

$$2m = k(m - 1) \wedge m - 1 = k \cdot 2m \wedge -(m - 1) = k \cdot 2,$$

što je ispunjeno za $m = -1$ (tada je $k = 1$).

b) Da bi sistem bio protivrječan, potrebno je i dovoljno da je

$$2m = k(m - 1) \wedge m - 1 = k \cdot 2m \wedge -(m - 1) \neq k \cdot 2,$$

što je tačno za $m = \frac{1}{3}$.

c) Sistem je određen za $m \neq -1$, $m \neq \frac{1}{3}$.

Drugi način. a) Za vrijednost $m = -1$ je $D = D_x = D_y = 0$, pa ako, prema napomeni 12.2, u sistem uvrstimo $m = -1$, dobijemo dvije iste jednačine $-2x - 2y + 2 = 0$, što znači da je za $m = -1$ sistem neodređen.

b) Za $m = \frac{1}{3}$ je $D = 0$, $D_x \neq 0$ (i $D_y \neq 0$), pa je sistem protivrječan.

c) Za $m \neq -1$, $m \neq \frac{1}{3}$ je $D \neq 0$, pa je sistem određen.

12.28. Dati sistem je neodređen ako je

$$\frac{m}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{1} = \frac{5a}{\frac{5}{2}},$$

tj. ako je

$$2m = 3 = 2a.$$

Dati sistem, dakle, može biti neodređen za $m = \frac{3}{2} \in (1, 2)$. Znači, od datih intervala samo interval $(1, 2)$ sadrži m sa traženim svojstvom. Jasno je da će sistem biti stvarno neodređen ako je, pored $m = \frac{3}{2}$, još i $a = \frac{3}{2}$.

12.29. Za $a \neq 2$ je $y = -2$, $x = a + 2$, pa je rješenje datog sistema dvojka negativnih brojeva ako i samo ako je $a < -2$. Za $a = 2$ sistem je neodređen, ali mu rješenje nije nijedna dvojka negativnih brojeva.

12.30. Iz datog sistema slijedi da je $x = 1 + \frac{a}{3}$, $y = \frac{2a}{3} - 1$, i uslov $x > y$ je ispunjen ako je $a < 6$.

12.31. a) Prema teoremi 12.4. treba i dovoljno je da je $D = 2m^2 + 1 = 0$, ali takve vrijednosti parametra m ne postoje. Znači, sistem ima samo trivijalno rješenje $x = 0$, $y = 0$.

b) Sistem ima netrivijalnih rješenja ako i samo ako je $m = -\frac{3}{4}$.

12.32. Za nepokretnu tačku je $x = x'$ i $y = y'$, pa izlazi da je nepokretna tačka $M\left(\frac{\sqrt{3}-1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Pošto je determinanta sistema

$$(1 + \sqrt{3})x - y = 1 \wedge x + (\sqrt{3} - 1)y = 0.$$

$D = 3$, tj. $D \neq 0$, sistem ima samo jedno rješenje $x = \frac{\sqrt{3}-1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, tj. postoji samo jedna čvrsta tačka preslikavanja.

12.3. SISTEMI OD TRI I VIŠE LINEARNIH JEDNAČINA

12.33. Da bismo olakšali izračunavanje determinanti D, D_x i D_y, u njima ćemo, na osnovu teoreme 12.6, elementima drugog retka dodati odgovarajuće elemente trećeg retka, nakon čega se u trećem stupcu dobiju na dva mjesta nule:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot A(1) = (-1)^{3+3} \cdot D(1) =$$

$$= \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -12.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot A(4) + 0 \cdot A(0) + 1 \cdot A(1) =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot D(4) + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot D(1) =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -40 + 16 = -24.$$

Rješenje datog sistema je trojka brojeva

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{D_z}{D} = 2.$$

12.34. $D = -6$, $D_x = 19$, $D_y = -9$, $D_z = -29$;

$$x = -\frac{19}{6}, \; y = \frac{3}{2}, \; z = \frac{29}{6}.$$

12.35. $D = 28$, $D_x = -56$, $D_y = 14$, $D_z = 84$;

$$x = -2, \; y = \frac{1}{2}, \quad z = 3.$$

12.36. Lako je uočiti da su svi odgovarajući koeficijenti proporcionalni, pa sistem ima beskonačno mnogo rješenja. Na osnovu teoreme 12.2. sve tri jednačine su međusobno ekvivalentne, pa se dvije mogu odbaciti (suvišne su). Tako ostaje jedna jednačina sa tri nepoznate, i jasno je da su dvije od njih proizvoljne, a treća zavisi od njih. Naravno da je $D = D_x = D_y = D_z = 0$.

12.37. a) Rješenje sistema od prve dvije jednačine datog sistema je $x = -1$, $y = 2$, ali ono zadovoljava i preostalu jednačinu. Zato je par $(-1, 2)$ rješenje i datog sistema.

b) U ovom slučaju rješenje sistema od dvije prve jednačine ne zadovoljava preostalu jednačinu. Zato ovaj sistem nema rješenja.

Napomena: Kod sistema a) je determinanta svih koeficijenata

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

a kod sistema b) ona je različita od 0. Ovakve determinante zovemo *eliminante*. Vrijedi općenito teorema: Sistem od n linearnih jednačina sa $n - 1$ nepoznatih ima rješenja samo ako je eliminanta jednaka 0.

12.38. *Prvi način.* Ako rješenje $x = -1$, $y = 2$ sistema od dvije prve jednačine datog sistema uvrstimo u treću jednačinu, dobijemo jednakost

$$a = 2b - c. \tag{1}$$

Znači, ako za koeficijente a, b i c treće jednačine vrijedi jednakost (1), tada sistem ima rješenje, i to par $(-1, 2)$.

Drugi način. Do jednakosti (1) možemo doći iz uslova da je eliminanta $D = 0$ (vidjeti napomenu uz prethodni zadatak).

12.39. Prema teoremi 12.4. ovaj homogeni sistem ima rješenja različita od trivijalnog $x = y = z = 0$ ako je determinanta

$$D = 5a - 9 = 0, \text{ tj. ako je } a = \frac{9}{5}.$$

Iz prve dvije jednačine sistema slijedi da je

$$x = -\frac{7}{5}z,\ y = \frac{2}{5}z,$$

pa kada to uvrstimo u treću jednačinu zaključujemo da mora biti $a = \frac{9}{5}$ ili $z = 0$. Ako je $a \neq \frac{9}{5}$, onda je $z = 0$, pa otuda i $x = 0$, $y = 0$. Ukoliko je $a = \frac{9}{5}$, vidimo da je i treća jednačina zadovoljena za $x = -\frac{7}{5}z$, $y = \frac{2}{5}z$ i svako $z \in R$.

Rezultat:

$$a = \frac{9}{5};\quad x = -\frac{7}{5}z,\quad y = \frac{2}{5}z,\quad z \in R.$$

12.40. Označimo li jednačine sistema redom sa (1), (2) i (3), tada imamo:

$$(2) - (1):\quad (a-1)x - (a-1)y = 0, \tag{4}$$

$$a\cdot(1) - (3):\quad (a-1)x + (a^2-1)y = a - b, \tag{5}$$

$$x + ay + bz = 1. \tag{1}$$

a) Za $a \neq 1$ iz jednačine (4) slijedi $x = y$, a iz jednačine (5) dobijemo jednačinu

$$(a-1)(a+2)x = a - b. \tag{6}$$

1° Ako je $a \neq -2$, iz jednačine (6) je

$$x = y = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)},$$

a iz jednačine (1) za $b \neq 0$ je

$$z = \frac{b(a+1)-2}{b(a-1)(a+2)},$$

a za $b = 0$ jednačina (1) je protivrječna, pa zato i sistem.

2° Ako je $a = -2$, $b \neq -2$, tada je jednačina (6) protivrječna, pa je i sistem protivrječan.

3° Ako je $a = b = -2$, u jednačini (6) nepoznata x je proizvoljna, $y = x$, a iz jednačine (1) je

$$z = -\frac{x+1}{2}.$$

b) Za $a = 1$ x i y su u jednačini (4) proizvoljni.

1° Za $b = 1$ x i y su proizvoljni i u jednačini (5), a iz (1) slijedi da je

$$z = 1 - (x + y).$$

2° Za $b \neq 1$, jednačina (5) je protivrječna, pa sistem nema rješenja.

Rezultat:

Za $a \neq 1$, $a \neq -2$, $b \neq 0$, sistem ima tačno jedno rješenje:

$$x = y = \frac{a-b}{(a-1)(a+2)},\quad z = \frac{b(a+1)-2}{b(a-1)(a+2)}.$$

Za $a \neq 1$, $b = 0$ ili za $a = -2$, $b \neq -2$ ili za $a = 1$, $b \neq 1$, sistem nema rješenja.

Za $a = b = -2$, jedna nepoznata je proizvoljna, a ostale zavise od nje prema jednakostima $y = x$, $z = -\frac{x+1}{2}$.

Za $a = b = 1$, dvije nepoznanice su proizvoljne, a treća zavisi od njih prema jednakosti $z = 1 - (x + y)$.

12.41. Pošto je $D = 2(a^3 - 3a + 2) = 2(a-1)^2(a+2)$, $D_x = 2(a-1)(a-2)$, $D_y = 2a(a-1)$ i $D_z = 2(a-1)(a-2)$, to imamo:

a) $D \neq 0$ za $a \neq 1$ i $a \neq -2$, pa je rješenje:

$$x = \frac{a-2}{(a-1)(a+2)},\quad y = \frac{a}{(a-1)(a+2)},\quad z = \frac{a-2}{(a-1)(a+2)}.$$

b) $D = 0$ za $a = 1$ ili $a = -2$.

1° Ako je $a = 1$, tada je $D_x = D_y = D_z = 0$. Zato, prema napomeni 12.2, u dati sistem uvrstimo vrijednost $a = 1$, nakon čega vidimo da su svi odgovarajući koeficijenti uz nepoznate proporcionalni, ali slobodni koeficijenti nisu u toj proporciji. Zato je sistem protivrječan.

2° Ako je $a = -2$, tada je $D_x \neq 0$ (također je $D_y \neq 0$ i $D_z \neq 0$), pa je sistem protivrječan.

12.42. Pošto je $D = (a+3)(a-4)$, $D_x = -3(a+3)$, $D_y = 3(a+3)$ i $D_z = 4(a+3)(a-4)$, to imamo:

a) Ako je $a \neq -3$ i $a \neq 4$, sistem ima jedno i samo jedno rješenje, i to:

$$x = \frac{-3}{a-4}, \quad y = \frac{3}{a-4}, \quad z = 4.$$

b) Ako je $a = -3$, tada je $D_x = D_y = D_z = D = 0$. Uvrstimo li vrijednost $a = -3$ u dati sistem, uviđamo da sistem ima beskonačno mnogo rješenja, pri čemu su dvije nepoznate proizvoljne.

c) Ako je $a = 4$, tada je $D = 0$, $D_x \neq 0$, pa je sistem protivrječan.

12.43. Za $a = 1$ dvije nepoznate su proizvoljne, za $a = -2$ sistem nema rješenja, a ako je $a \neq 1$ i $a \neq -2$, sistem ima tačno jedno rješenje:

$$x = \frac{2(a+1)}{a+2}, \quad y = z = \frac{a}{a+2}.$$

12.44. Zadatak se svodi na rješavanje sistema od tri jednačine sa tri nepoznate a, b i c, i treba dokazati da je $a = c = 1$, $b = -2$.

12.45. a) Pošto je $D = (a+1)(a-6)$, $D_x = -(a+1)$, $D_y = a+1$ i $D_z = 6(a+1)(a-6)$, presječna tačka ravni postoji ako je $a \neq -1$ i $a \neq 6$, i koordinate te tačke M su:

$$x = -\frac{1}{a-6}, \quad y = \frac{1}{a-6}, \quad z = 6.$$

b) Kada u jednačinu sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100$$

uvrstimo koordinate tačke M dobijemo jednakost

$$\frac{\sqrt{2}}{|a-6|} = 8,$$

pa dalje imamo:

a) Za $a > 6$ je $a = \frac{\sqrt{2}+48}{8} (> 6)$;

b) za $a < 6$ je $a = \frac{48-\sqrt{2}}{8} (< 6)$.

Za tačku M imamo rješenje:

$$M(-4\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 6) \quad (a > 6) \quad \text{i} \quad M_1(4\sqrt{2},\ -4\sqrt{2},\ 6) \quad (a < 6).$$

12.46. a) Dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$(1-2k)x = -2(1-2k),$$
$$2kx + (k+1)z + k^2 + 5k = 0,$$
$$kx + y + kz + 5k = 0.$$

Za $k \neq \frac{1}{2}$ i $k \neq -1$ je $x = -2$, $y = k^2 - 3k$, $z = -k$;

za $k = -1$ je $x = -2$, z je proizvoljno, a $y = z + 3$;

za $k = \frac{1}{2}$, x je proizvoljno, $y = -\frac{2x+19}{12}$, $z = -\frac{4x+11}{6}$.

b) Ako je $k \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$, tada je $x < z < y$ (sl. 12.3):

za $k = 0$, $x < z = y \quad (= 0)$;

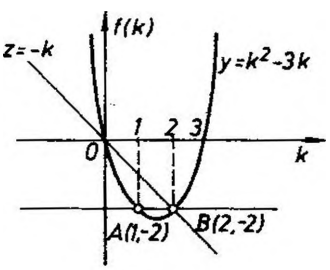
ako je $k \in (0, 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, tada je $x < y < z$;

za $k = 1$ je $x = y \quad (= -2) < z$;

ako je $k \in (1, 2)$, tada je $y < x < z$;

ako je $k = 2$, tada je $x = y = z \quad (= -2)$;

ako je $k \in (2, +\infty)$, tada je $z < x < y$.



Sl. 12.3.

12.47. *Prvi način.*

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 0 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -3\\ 4 & 0 & 0 & -2\end{vmatrix}.$$

Shodno teoremi 12.6. elementima prvog retka dodali smo odgovarajuće elemente drugog retka, a elementima četvrtog elemente trećeg, nakon čega smo dobili determinantu sa po dvije nule u prvom i četvrtom retku. Time je olakšano razvijanje determinante preko kofaktora, odnosno preko minora (vidi poglavlje 12.3). Dalje imamo:

$$D=3\cdot A(3)+(-2)\cdot A(-2)=3\cdot(-1)^{1+1}\cdot D(3)-2\cdot(-1)^{1+3}\cdot D(-2),$$

$$D=3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -3\\ 4 & 0 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}-$$

$$-2\cdot\left(4\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=-6\cdot(-1)-8\cdot(3-1)+4\cdot(-2+1),$$

$$D=-14.$$

Za ostale determinante dobijemo:

pa je rješenje sistema: $D_x=-14,\ D_y=14,\ D_z=-28,\ D_u=0,$

$$x=1,\ y=-1,\ z=2,\ u=0.$$

Drugi način. Puno je jednostavnije riješiti dati sistem bez upotrebe determinanti. Sabiranjem prve i druge jednačine, te oduzimanjem prve od četvrte jednačine dobije se sistem

$$3x-2z=-1\wedge 2x+z=4,$$

iz koga slijedi da je $x=1$, $z=2$ itd.

12.48. $x=2,\ y=-2,\ z=1,\ u=-3.$

12.49. $x=y=z=0,\ t=1.$

12.50. Dodati elementima četvrtog stupca determinante D sistema odgovarajuće elemente drugog stupca (teorema 12.6), i zatim vidjeti napomenu 12.3. Pošto je $D=0$, $D_y\neq 0$, sistem nema rješenja.

12.51. Ovdje važi teorema o eliminanti koju smo naveli uz zadatak 12.37. Kod eliminante

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -5 & 2\\ 5 & -4 & 5 & 5\\ 3 & -2 & -6 & 3\end{vmatrix}$$

je prvi stubac isti kao četvrti, pa je, prema teoremi 12.5, eliminanta $D=0$. Zato sistem ima rješenje. Prve tri jednačine datog sistema daju sistem:

$$x+y+z=1,$$
$$2x+3y-5z=2,$$
$$5x-4y+5z=5.$$

Kod ovog sistema je $D=D_x=-63$. Pošto je kod determinante D_y prvi stubac isti kao i drugi, a pošto su kod determinante D_z isti prvi i treći stubac, to je $D_y=D_z=0$.

Rješenje posljednjeg sistema je $x=1$, $y=z=0$, ali je to, naravno, rješenje i četvrte jednačine datog sistema, pa je ovo rješenje datog sistema.

12.52. Uvjeriti se da je $D=0$ i vidjeti teoremu 12.4. Rješenje je:

$$x=\frac{5}{3}t,\ y=-t,\ z=-\frac{2}{3}t,\ t \text{ je proizvoljno.}$$

12.53. Stavimo li da je $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=y$, dati sistem izgleda ovako:

$$y-x_1=1\wedge y-x_2=2\wedge\ldots\wedge y-x_n=n.$$

Sabiranjem ovih n jednačina dobije se, na osnovu rezultata u primjeru 3.5,

$$y=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Rješenje sistema dato je formulom

$$x_k=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-k,\quad k=1,2,3,\ldots,n.$$

13. LINEARNE NEJEDNAČINE I SISTEMI LINEARNIH NEJEDNAČINA

13.1. a) 1° Ako je $a > 0$, tada je $x < \frac{b}{a}$;

2° ako je $a < 0$, tada je $x > \frac{b}{a}$;

3° za $a = 0$ i $b > 0$, x je proizvoljan realan broj;

4° za $a = 0$, $b \leqslant 0$, nejednačina nema rješenja.

b) 1° Ako je $a > 0$, tada je $x > \frac{b}{a}$;

2° ako je $a < 0$, tada je $x < \frac{b}{a}$;

3° za $a = 0$ i $b < 0$, x je proizvoljan realan broj;

4° za $a = 0$ i $b \geqslant 0$, nejednačina nema rješenja.

13.2. a) 1° Za $|m| > |n|$, $x < \frac{1}{m+n}$;

2° za $|m| < |n|$, $x > \frac{1}{m+n}$;

3° za $m = n$ ili $m = -n$, $n > 0$, nejednačina nema rješenja;

4° za $m = -n$, $n < 0$, x je proizvoljan realan broj.

b) Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$(m-1)(m^2+m+1)x > 2(m^2+m+1).$$

Pošto je $m^2 + m + 1 > 0$ za sve vrijednosti parametra $m \in R$ (jer je diskriminanta $D < 0$), imamo:

1° za $m > 1$ je $x > \frac{2}{m-1}$;

2° za $m < 1$ je $x < \frac{2}{m-1}$;

3° za $m = 1$, nejednačina nema rješenja.

13.3. a) $\frac{-3}{2x+4} < 0 \Leftrightarrow 2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -2$;

b) data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\frac{65x - 85}{2(3x-4)} \geqslant 0,$$

odakle slijedi da je skup rješenja

$$\mathscr{R} = \left(-\infty, \frac{17}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right).$$

13.4. a) $\mathscr{R} = (-\infty, 0)$.

b) Za $x < 1$ je $x - 1 < 0$ (a $|x-1| > 0$), pa je tada skup rješenja interval $(-\infty, -1)$. Za $x - 1 \geqslant 0$, tj. za $x \geqslant 1$, iz date nejednačine slijedi da je $x - 1 > x - 1$, što je nemoguće.

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = (-\infty, -1).$$

13.5. U intervalu $(-\infty, -3)$ nejednačina nema rješenja, u intervalu $[-3,2)$ skup rješenja je $\mathscr{R}_1 = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, a u intervalu $[2, +\infty)$ skup rješenja je $\mathscr{R}_2 = [2, +\infty)$.

Skup rješenja date nejednačine je

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

13.6. a) Data nejednačina je ekvivalentna sistemu

$$(1) \qquad -1 < \frac{2x-1}{x-1} \wedge \frac{2x-1}{x-1} < 1,$$

čija rješenja čine skup

$$\mathscr{R} = \left(0, \frac{2}{3}\right).$$

b) $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{4}\right)$.

13.7. a) $\mathscr{R} = (-2, +\infty)$; b) $\mathscr{R} = \left[\frac{7}{11}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 11\right]$.

13.8. a) $\|x+2|-1| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant |x+2|-1 \leqslant 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -2 \leqslant x+2 \leqslant 2 \Leftrightarrow -4 \leqslant x \leqslant 0$.

b) 1° Za $x < 0$ imamo nejednačinu

$$|-3x+1| > -x.$$

Pošto je $x < 0$, to je $-3x+1 > 0$, pa se dobije $x < \frac{1}{2}$. Iz uslova $x < 0$ i $x < \frac{1}{2}$, slijedi jedan podskup rješenja

$$\mathscr{R}_1 = (-\infty, 0).$$

2° Ako je $x \in [0, 1)$, dobije se nejednačina

$$|-3x+1| > x.$$

Ako je $x > \frac{1}{3}$, iz te nejednačine slijedi da je $x > \frac{1}{2}$. Iz uslova $0 \leqslant x < 1$, $x > \frac{1}{3}$ i $x > \frac{1}{2}$ slijedi podskup rješenja

$$\mathscr{R}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

U slučaju da je $x \leqslant \frac{1}{3}$, dobije se

$$\mathscr{R}_3 = \left[0, \frac{1}{4}\right).$$

3° Ako je $x \in [1, +\infty)$, imamo nejednačinu

$$|-x-1| > x,$$

i skup njenih rješenja je

$$\mathscr{R}_4 = [1, +\infty).$$

Skup rješenja date nejednačine je

$$\mathscr{R} = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

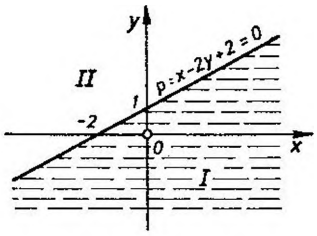
13.9. *Algebarsko rješenje:*

$$x - 2y + 2 > 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{2}x + 1,$$

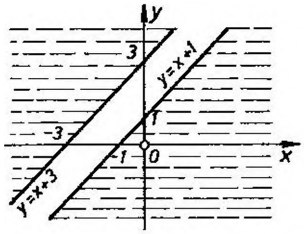
$$\mathscr{R} = \left\{(x, y) \mid x \in R,\ y < \frac{1}{2}x + 1\right\}.$$

Grafičko rješenje. Jednačini $x - 2y + 2 = 0$ odgovara u koordinatnom sistemu Oxy prava p (sl. 13.1), a nejednačini $x - 2y + 2 > 0$, odnosno $y < \frac{1}{2}x + 1$ odgovara poluravan I ispod prave p (bez te prave).

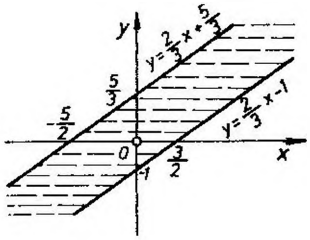
To utvrđujemo ovako: Za tačku (x, y) na pravoj p vrijedi $y = \frac{1}{2}x + 1$. Ako je $y < \frac{1}{2}x + 1$, onda tačka (x, y) leži ispod prave p i obrnuto. Svaku nejednačinu $ax + by + c < 0$ $(b \neq 0)$ možemo napisati u obliku $y \gtrless kx + l$. Rješenja nejednačine $ax + by + c < 0$ su sve tačke (x, y) iznad (ispod) prave p: $ax + by + c = 0$.



Sl. 13.1.



Sl. 13.2.



Sl. 13.3.

13.10. a) $|x - y + 2| > 1 \Leftrightarrow (y > x + 3 \vee y < x + 1)$. Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \{(x, y) | x \in R, (y < x + 1 \vee y > x + 3)\},$$

a grafički prikaz rješenja dat je na slici 13.2.

b) $\mathscr{R} = \left\{(x, y) \in R^2 | \frac{2}{3}x - 1 < y < \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right\}$.

Rješenjima na slici 13.3. odgovara pruga između paralelnih pravih.

13.11. a) Ako je $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, tada imamo nejednačinu $x + y < 1$. Njena su rješenja svi parovi (x, y) za koje je

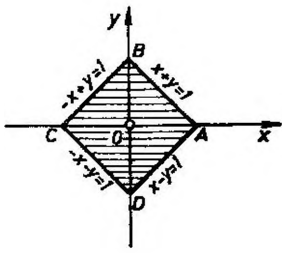
$$0 \leqslant x < 1, \; 0 \leqslant y < 1 - x,$$

a kojima na slici 13.4. odgovara trougaona površ OAB bez tačaka hipotenuze AB. Na kraju se za rješenja dobiju parovi (x, y) za koje vrijedi:

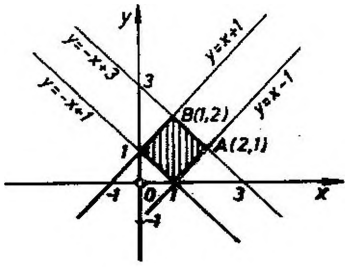
$$-1 < x \leqslant 0, \quad -x - 1 < y < x + 1;$$
$$0 \leqslant x < 1, \quad x - 1 < y < -x + 1.$$

Rješenjima na slici 13.4. odgovara unutarnja oblast kvadrata
$[A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1)]$.

b) $0 \leqslant x \leqslant 1, \quad -x + 1 \leqslant y \leqslant x + 1;$
$1 \leqslant x \leqslant 2, \quad x - 1 \leqslant y \leqslant -x + 3$ (sl. 13.5).



Sl. 13.4.



Sl. 13.5.

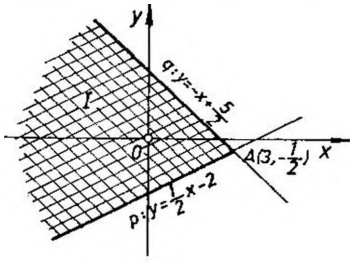
13.12. a) Na slici 13.6. predstavljene su prave

$$p: y = \frac{1}{2}x - 2 \quad \text{i} \quad q: y = -x + \frac{5}{2}$$

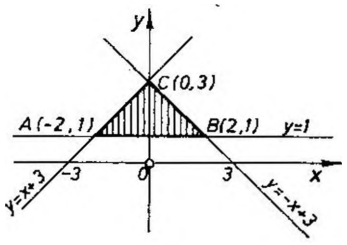
koje se sijeku u tački $A\left(3, -\frac{1}{2}\right)$. Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left\{(x, y) \in R^2 \mid x < 3, \frac{1}{2}x - 2 < y < -x + \frac{5}{2}\right\},$$

kome na slici odgovara oblast I između pravih p i q.



Sl. 13.6.



Sl. 13.7.

b) Prema slici 13.7. za rješenja (x, y) vrijedi:

$$-2 < x \leqslant 0, \quad 1 < y < x + 3;$$
$$0 \leqslant x < 2, \quad 1 < y < -x + 3.$$

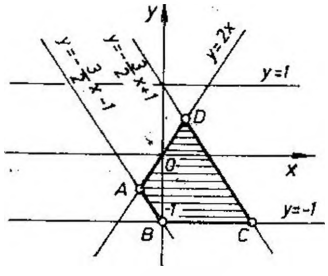
13.13. a) $\mathscr{R} = (-2, -1] \cup [1, 4)$;

b)
$$\mathscr{R} = \begin{cases} \mathscr{T}, & \text{za } a \leqslant 0, \\ (-a+2,\ a+2), & \text{za } 0 < a \leqslant \frac{1}{2}, \\ \left(-a+2, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2},\ a+2\right), & \text{za } \frac{1}{2} < a \leqslant \frac{15}{11}, \\ \left[\frac{7}{11}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, a+2\right), & \text{za } \frac{15}{11} < a \leqslant 9, \\ \left[\frac{7}{11}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 11\right], & \text{za } a > 9. \end{cases}$$

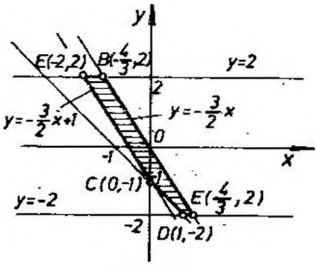
13.14. Rješenja su parovi $(x, y) \in R^2$ za koje vrijedi:

$$-\frac{2}{7} \leqslant x \leqslant 0, \quad -\frac{3}{2}x - 1 \leqslant y \leqslant 2x;$$
$$0 < x \leqslant \frac{2}{7}, \quad -1 \leqslant y \leqslant 2x;$$
$$\frac{2}{7} < x \leqslant \frac{4}{3}, \quad -1 \leqslant y \leqslant -\frac{3}{2}x + 1.$$

Rješenjima odgovara oblast četverougla $ABCD$ na slici 13.8.



Sl. 13.8.



Sl. 13.9.

13.15. Skup rješenja je isti kao u zadatku 13.11. a) (sl. 13.4).

13.16. $-2 \leqq x \leqq -\frac{4}{3}, \quad -\frac{3}{2}x - 1 \leqq y \leqq 2;$

$-\frac{4}{3} < x \leqq 0, \quad -\frac{3}{2}x - 1 \leqq y \leqq -\frac{3}{2}x;$

$0 < x \leqq 1, \quad -x - 1 \leqq y \leqq -\frac{3}{2}x;$

$1 < x \leqq -\frac{4}{3}, \quad -2 \leqq y \leqq -\frac{3}{2}x$ (sl. 13.9).

14. KVADRATNA FUNKCIJA. KVADRATNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

14.1. NULE I ZNAK KVADRATNE FUNKCIJE. KVADRATNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

14.1. Za diskriminantu jednačine imamo:

$$D = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 = [(b + c)^2 - a^2][(b - c)^2 - a^2],$$
$$D = (a + b + c)(b + c - a)(a + b - c)[b - (a + c)].$$

Zaključiti (na osnovu odnosa između dužina stranica trougla) da je $D < 0$, pa zato jednačina nema realna rješenja.

14.2. a) Za $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a, b) \neq (\pm 1, 0)$ jednačina je ekvivalentna sa kvadratnom jednačinom čija je diskriminanta

$$D = [(a - 1)^2 + b^2][(a + 1)^2 + b^2] > 0.$$

Znači, rješenja date jednačine su realna za sve realne vrijednosti a i b, izuzev za $(a, b) = (0, 0)$ ili $(a, b) = (\pm 1, 0)$.

b) Pošto je $D > 0$, rješenja ne mogu biti jednaka.

14.3. Pošto je

$$ax^2 + bx + c = \left[\sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2 - \frac{D}{4a},$$

vidimo ovo: uslov $D = 0$ je potreban i dovoljan da bi dati trinom bio u skupu C kompleksnih brojeva kvadrat binoma prvog stepena. Potreban i dovoljan uslov za to u skupu R je, međutim, $D = 0$ i $a > 0$.

14.4. Zaključiti da je $m > 0$ i svesti datu jednačinu na oblik

$$m^2 \sin^2 2x - 4 \sin 2x - 4 = 0, \quad 2x \in (0, \pi).$$

Pošto je $(\sin 2x)_1 < 0$, $(\sin 2x)_1$ otpada, a iz uslova $\frac{2 + 2\sqrt{1 + m^2}}{m^2} \leqslant 1$ slijedi uslov $m \geqslant 2\sqrt{2}$.

Rezultat: za $m \geqslant 2\sqrt{2}$ data jednačina ima jedno rješenje $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ i to je ugao, odnosno broj x za koji je $\sin 2x = \frac{2 + 2\sqrt{1 + m^2}}{m^2}$.

14.5. Pošto su x_1 i x_2 racionalni brojevi, broj $\frac{p^2}{4} - q$ je kvadrat nekog racionalnog broja.

1° Ako je $p = 2n$, tada je $-\frac{p}{2} \in Z$ i $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \in Z$, pa $x_{1,2} \in Z$.

2° Ako je $p = 2n + 1$ i $q = 2m$, tada je $\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ razlomak oblika $\frac{k}{2}$, k neparan broj. Zato su rješenja $x_{1,2} = \frac{-p \pm k}{2}$ cijeli brojevi.

3° Ako je $p = 2n + 1$ i $q = 2m + 1$, tada je $\frac{p^2 - 4q}{4} = \frac{(2n+1)^2 - 4(2m+1)}{4}$, pa je brojnik neparan broj $(2k + 1)^2$. Zato je $\sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = \frac{2k+1}{2}$, pa je

$$x_1 = -n - k - 1,\ x_2 = -n + k,$$

tj. rješenja su cijeli brojevi.

Prema tome, za sve vrijednosti $p, q \in Z$, rješenja x_1 i x_2, ukoliko su ona racionalna, su cijela.

14.6. 1° Ako je $x^2 < 4$, data jednačina se svodi na jednačinu $x^2 = 4$, pa tada nema rješenja (jer mora biti $x^2 < 4$).

2° Ako je $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$, jednačina se svodi na identitet $5 = 5$, pa je rješenje svaka vrijednost $x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$.

3° Ako je $x^2 > 9$, dobijemo jednačinu $x^2 = 9$, pa ni tada nema rješenja.

Skup rješenja date jednačine je

$$\mathscr{R} = [-3, -2] \cup [2, 3].$$

14.7. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\left|\frac{-x}{x-1}\right| = \frac{-x}{x-1},$$

(a također jednačini $|-x(x-1)| = -x(x-1)$ za $x \neq 1$). Ako stavimo $f(x) = \frac{-x}{x-1}$, tada je $f(x) \geqslant 0$ ukoliko je $0 \leqslant x < 1$, a $f(x) < 0$ ako je $x < 0$ ili $x > 1$.

1° U intervalu $[0, 1)$ jednačina je identitet, pa su rješenja sve vrijednosti $x \in [0, 1)$.

2° U intervalima $(-\infty, 0)$ i $(1, +\infty)$ jednačina ima oblik

$$\frac{x}{x-1} = -\frac{x}{x-1},$$

odakle slijedi da je $x = 0$. Pošto $0 \notin (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $x = 0$ nije rješenje.

Skup rješenja jednačine je

$$\mathscr{R} = [0, 1).$$

14.8. Ako uvedemo oznake $f(x) = (x-1)(x+2)$, $g(x) = (x+1)(2x-5)$, tada imamo:

$f(x) \geqslant 0$ ako je $x \leqslant -2$ ili $x \geqslant 1$, $f(x) < 0$ ako je $-2 < x < 1$;

$g(x) \geqslant 0$ ako je $x \leqslant -1$ ili $x \geqslant \frac{5}{2}$, $g(x) < 0$ ako je $-1 < x < \frac{5}{2}$.

Jednačinu rješavamo, prema slici 14.8. posebno u intervalima $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$, $(-2, -1]$, $(-1, 1)$ i $\left[1, \frac{5}{2}\right)$.

1° U intervalima $(-\infty, -2]$ i $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ je $f(x) \geqslant 0$ i $g(x) \geqslant 0$, pa jednačina ima oblik $f(x) - g(x) = 2$, odnosno

$$x^2 - 4x - 1 = 0,$$

i njena su rješenja $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Pošto je $x_1 \approx -0{,}2$, otpada.

2° U intervalu $(-2, -1]$ imamo jednačinu

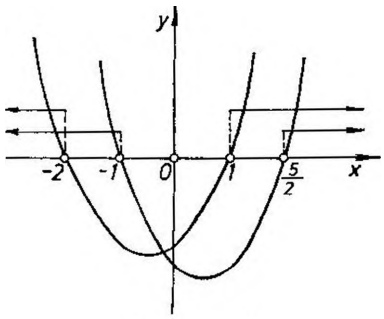
$$3x^2 - 2x - 5 = 0,$$

i rješenje $x = -1$.

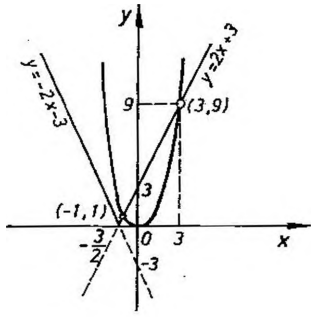
3° U intervalu $(-1, 1)$ data jednačina nema rješenja, a u intervalu $\left[1, \frac{5}{2}\right)$ rješenje je jednako $\frac{1 + 2\sqrt{7}}{3}$.

Rješenja jednačine su:

$$x_1 = 2 + \sqrt{5},\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{3}$$



Sl. 14.8.



Sl. 14.9.

14.9. a) Za $x < -\frac{3}{2}$ imamo funkcije

$$y = x^2 \text{ i } y = -2x - 3,$$

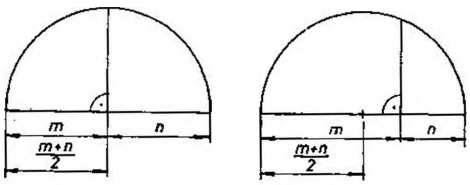
a za $x \geqslant -\frac{3}{2}$ imamo funkcije

$$y = x^2 \text{ i } y = 2x + 3.$$

U intervalu $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, prema slici 14.9, nema rješenja (jer parabola $y = x^2$ i poluprava $y = -2x - 3$, $x < -\frac{3}{2}$ nemaju zajedničkih tačaka). U intervalu $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ postoje dva rješenja — dvije presječne tačke čije su apscise $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$.

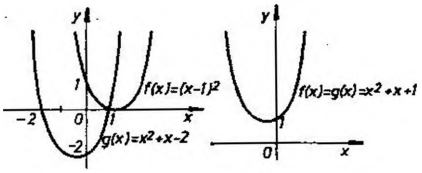
b) U intervalu $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ treba riješiti jednačinu $x^2 = -2x - 3$, ili ona nema realna rješenja. U intervalu $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ imamo jednačinu $x^2 - 2x - 3 = 0$, i rješenja $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

14.10. Pokazati da se na izraze za x_1 i x_2 može primijeniti teorema 10.2. Zaključak je ilustrovan na slici 14.10.



a) : m = n b) : m ≠ n.

Sl. 14.10.



a) b)

Sl. 14.11.

14.11. Parovi (a, x) rješenja sistema $f(x) = 0 \wedge g(x) = 0$ su:

$$\text{a) } (-2, 1); \text{ b) } \left(1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

U slučaju a) je $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = x^2 + x - 2$, i broj $x = 1$ je jedina zajednička nula (sl. 14.11. a)). U slučaju b) je $f(x) = g(x) = x^2 + x + 1$, i obje nule $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ su zajedničke — polinomi su identični (sl. b)).

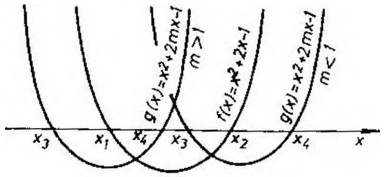
14.12. Zadatak se svodi na ispitivanje znaka funkcija $g(x_1) = 2(\sqrt{2}+1)(1-m)$ i $g(x_2) = 2(\sqrt{2}-1)\cdot(m-1)$ parametra m.

Treba se pomoći i grafičkom predstavom na slici 14.12. *Rezultat:*

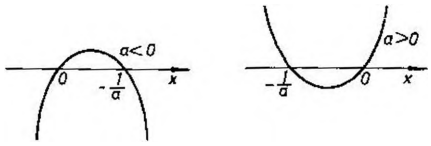
Za $m < 1$ je $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$, pa je $x_1 < x_3 < x_2 < x_4$.

za $m = 1$ je $x_3 = x_1 < x_2 = x_4$.

za $m > 1$ je $x_3 < x_1 < x_4 < x_2$.



Sl. 14.12.



Sl. 14.13.

14.13. b) $f(x) = x(ax+1)$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = -\frac{1}{a}\right)$.

1° Ako je $a < 0$, tada, prema slici 14.13, imamo:

$f(x) > 0$ ako je $x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $f(x) < 0$ ako je $x \in (-\infty, 0) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$. Slično se zaključuje ako je $a > 0$.

14.14. $|m| < 6$.

14.15. Diskriminanta trinoma $x^2 - 4x + b - 15$ mora biti negativna, pa se dobije da je $b > 19$.

14.16. U intervalu $(-1, 3)$ je $x^2 - 2x - 3 < 0$, pa se dobije nejednačina $x^2 + x - 6 > 0$, iz koje slijedi da je $x < -3$ ili $x > 2$. Zato je jedan skup rješenja

$$\mathscr{R}_1 = (2, 3).$$

Ako je $x \leqslant -1$ ili $x \geqslant 3$, dobijemo drugi skup rješenja

$$\mathscr{R}_2 = [3, 5).$$

Skup rješenja nejednačine je

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 = (2, 5).$$

14.17. Zaključiti da je $x > 0$, i da je data nejednačina ekvivalentna nejednačini

$$|4 - x| + |2x - 5| < 2x^2.$$

U intervalu $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ dobijemo podskup rješenja $\mathscr{R}_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, a u intervalima $\left[\frac{5}{2}, 4\right)$ i $[4, +\infty)$ dobijemo identički tačne nejednakosti $2x^2 - x + 1 > 0$ i $2x^2 - 3x + 9 > 0$.

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

14.18. Poći od ekvivalencije $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$, $b > 0$.

$$\mathscr{R} = (-2, 2).$$

14.19. U intervalu $(-\infty, -4)$ jednačina nema rješenja, u razmaku $[-4, 1)$ rješenja su -4 i 0, a u razmaku $[1, +\infty)$ rješenje je $-2 + \sqrt{14}$. Prema tome, rješenja su

$$x_1 = -4,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2 + \sqrt{14}.$$

14.20. 1° U slučaju da je $x^2 - 6x + 5 \geqslant 0$ također je $x^2 - 6x + 8 > 0$, pa se dobije jednačina

$$2x^2 - 12x + 13 - a = 0,$$

koja, ni za koju vrijednost a ne može imati više od dva rješenja. Isti je odgovor ako je $x^2 - 6x + 8 \leqslant 0$.

2° Ako je $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$ i $x^2 - 6x + 5 \leqslant 0$, tj. ako je $x \in [1, 2] \cup [4, 5]$, dobije se jednakost $3 = a$.

Prema tome, za $a = 3$ postoji beskonačno mnogo rješenja koja čine skup

$$\mathscr{R} = [1, 2] \cup [4, 5].$$

14.21. Primjenom formule za apsolutnu vrijednost kompleksnog broja dobija se nejednačina

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2} < 0,$$

odakle slijedi da je $-1 < \sin x < \frac{1}{2}$, odnosno

$$-\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

14.22. Prvo treba ispitati da li je $\frac{m-1}{m+1} \leqslant \frac{m+1}{m-1}$. Dalje pokazati da je $m+1>0$, $m-1>0$ i $x^2 + 2x + m^2 > 0$ za sve vrijednosti $m, x \in R$, $m > 1$. Zato se formula

$$\frac{m-1}{m+1} \leqslant \frac{x^2 - 2x + m^2}{x^2 + 2x + m^2} \leqslant \frac{m+1}{m-1}$$

svodi na ekvivalentnu, a tačnu konjunkciju $(x-m)^2 \geqslant 0 \wedge (x+m)^2 \geqslant 0$.

14.23. Data funkcija uzima određenu realnu vrijednost za svako x iz R za koje je (dati potkorijeni) izraz

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 + x - 30} \left(= \frac{(x+2)(x-8)}{(x+6)(x-5)} \right)$$

nenegativan. Kada se, npr., tabelarno, ispita znak ovog izraza dobije se da je

$$D(f) = (-\infty, -6) \cup [-2, 5) \cup [8, +\infty).$$

14.24. a) Posmatrani iskaz je tautologija ako je $a \in (-2, 4)$.

b) $A = \{0\} \cup [2, +\infty)$, $B = (-2, 4)$, $A \cap B = \{0\} \cup [2, 4)$.

c) 1° Ako je $-3 \leqslant a \leqslant 1$, tada je $y = x^2 + (a+1)x + 1$.
2° Ako je $a < -3$ ili $a > 1$, tada je:
$y = x^2 + (a+1)x + 1$ za $x < x_1$ ili $x > x_2$,
$y = -[x^2 + (a+1)x + 1]$ za $x_1 < x < x_2$ (sl. 14.14).

Sve krive prolaze tačkom $M(0, 1)$.[1)]

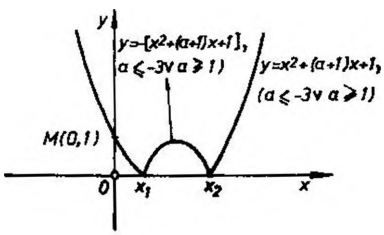
d) Prema 1°, za $-3 \leqslant a \leqslant 1$ grafik date funkcije je parabola

$$y = x^2 + (a+1)x + 1 = \left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{4 - (a+1)^2}{4},$$

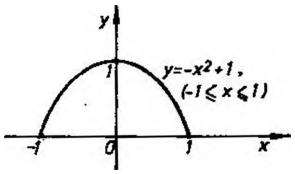
sa tjemenom u tački $T\left(-\frac{a+1}{2}, \frac{4-(a+1)^2}{4}\right)$. Iz jednakosti $x = -\frac{a+1}{2}$ i $y = \frac{4-(a+1)^2}{4}$ i uslova $-3 \leqslant a \leqslant 1$ slijedi da je geometrijsko mjesto tjemena ovih parabola dio parabole, sa jednačinom

$$y = -x^2 + 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

što je predstavljeno na slici 14.15.



Sl. 14.14.



Sl. 14.15.

[1)] Način dokazivanja te činjenice vidjeti u zadatku 14.34.

14.25. Za grafike funkcije f mogu nastupiti slučajevi prikazani na slici 14.16. pa imamo. redom. ove uslove:

a) $k > 0 \wedge D < 0$, tj. $k > 1$;

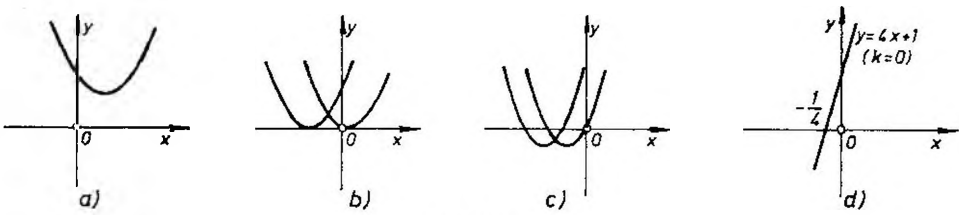
b) $k > 0 \wedge D = 0 \wedge -\frac{b}{2a} \leqslant 0$, tj. $k = 1$;

c) $k > 0 \wedge D > 0 \wedge -\frac{b}{2a} < 0 \wedge f(0) \geqslant 0$, tj. $0 < k < 1$;

d) $k = 0, f(x) = 4x + 1 > 0$, tj. $x > -\frac{1}{4}$, što znači da je tada $f(x) > 0$ za sve vrijednosti $x > 0$.

Rezultat:

Za $k \geqslant 0$ je $f(x) > 0$ za sve $x > 0$.



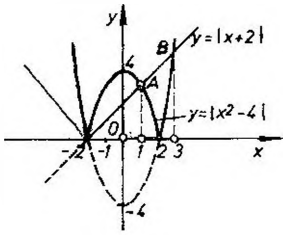
Sl. 14.16.

14.26. a) *Grafički način.* Na slici 14.17. predstavljene su funkcije $y = |x + 2|$ i $y = |x^2 - 4|$, pa se vidi (ako se precizno crta) da je skup rješenja

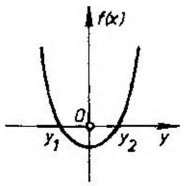
$$\mathscr{R} = (1, 3)$$

(jer su to sve vrijednosti x za koje je $|x + 2| > |x^2 - 4|$).

b) Pri analitičkom načinu rješavanja posmatrati nejednačinu posebno u intervalima $(-\infty, -2)$, $[-2, 2)$ i $[2, +\infty)$.



Sl. 14.17.



Sl. 14.18.

14.27.* Data nejednačina se može napisati u obliku

$$(x - k)^2 + 2|x - k| + 2 - k^2 < 0,$$

a ako stavimo $|x - k| = y$, dobijemo nejednačinu

$$f(y) = y^2 + 2y + 2 - k^2 < 0, \quad y \geqslant 0.$$

Ova nejednačina ima bar jedno rješenje ako je $D > 0$ i ako veća nula y_2 trinoma nije negativna (sl. 14.18). Zato treba riješiti sistem $D > 0 \wedge y_2 > 0$, ili sistem $D > 0 \wedge f(0) < 0$, pa se dobije

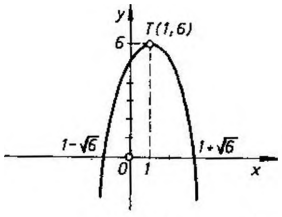
$$k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

14.28. Zadatak se svodi na određivanje koordinata tjemena parabole

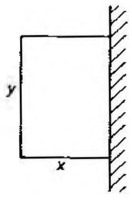
$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right).$$

a) $T\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$; b) $T(-4, 1)$ (ovdje se koordinate neposredno očitavaju, jer je funkcija napisana u obliku prve formule u poglavlju 14.2).

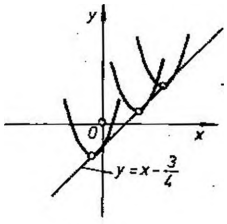
14.29. c) $[f(x)]_{\max} = \frac{4ac-b^2}{4a} = 6$. Ovu vrijednost funkcija dostiže za vrijednost argumenta $x = -\frac{b}{2a} = 1$. Prema slici 14.19. u intervalu $(-\infty, 1]$ funkcija raste od $-\infty$ do 6, a u intervalu $(1, +\infty)$ opada od 6 do $-\infty$.



Sl. 14.19.



Sl. 14.20.



Sl. 14.21.

14.30. Prema slici 14.20. je $P = xy = -2x^2 + 100x$, pa su stranice najvećeg ograđenog prostora

$$x = 25\,m, \quad y = 50\,m.$$

14.31. Pošto je

$$d^2 = 10^2(25t^2 - 64t + 64),$$

najmanje rastojanje imamo ako je $t = -\frac{b}{2a} = \frac{64}{50} = \frac{128}{100}$, tj. za $t = 1{,}28$ časova. Tada je $d_{\min} = 48$ km.

14.32. Ako se nađu koordinate tjemena parabola i eliminiše parametar m, dobije se jednačina prave

$$y = x - \frac{3}{4} \text{ (sl. 14.21).}$$

14.33. Data funkcija ima minimalnu vrijednost u tački $x = -\frac{5}{6}$, ali $-\frac{5}{6} \notin [0, 2]$. Pošto je $-\frac{5}{6} < 0$, a data funkcija raste na intervalu $\left(-\frac{5}{6}, \infty\right)$, ona na segmentu $[0, 2]$ ima minimalnu vrijednost u tački 0. Kako je $f(0) = -2$, to je

$$f(x)_{\min} = -2.$$

U intervalu $(-10, 5)$ je $y_{\min} = f\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{49}{12}$.

14.34. a) *Prvi način.* Zadatak se može svesti na određivanje rješenja $(x_0, y_0) = (1, 6)$ sistema jednačina

$$y = x^2 + (m_1 + 2)x - 3 - m_1,$$
$$y = x^2 + (m_2 + 2)x - 3 - m_2,$$

gdje su m_1 i m_2 proizvoljni različiti parametri.

Drugi način. Ako datu jednačinu napišemo u obliku

$$y = m(x - 1) + x^2 + 2x + 3,$$

tada, za $x = 1$, dobijamo $y = 6$ za svaku vrijednost parametra $m \in R$. Znači, sve parabole prolaze tačkom $M(1, 6)$.

b) Ako se iz formula $x = -\frac{b}{2a}$ i $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ eliminiše parametar m, dobije se jednačina parabole

$$y = -x^2 + 2x + 5 \text{ (sl. 14.22).}$$

14.35. a) Grafici funkcije $g(x) = x^2 - kx + 1$ ne smiju sjeći osu x, jer tada grafik funkcije $f(x) = |x^2 - kx + 1|$ ne bi bio parabola. Znači, mora biti $D \leqslant 0$, što je ispunjeno na intervalu

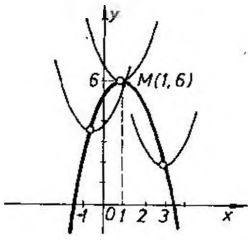
$$k \in [-2, 2].$$

b) Odgovarajuće parabole prolaze tačkom $M(0, 1)$ (vidjeti prethodni zadatak).

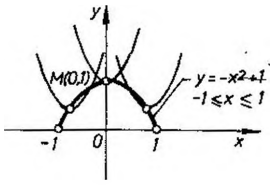
c) Dobije se luk parabole

$$y = -x^2 + 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

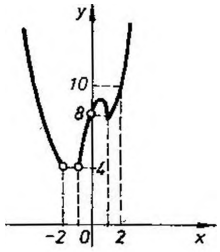
što je prikazano na slici 14.23. (vidjeti prethodni zadatak).



Sl. 14.22.



Sl. 14.23.



Sl. 14.24.

14.36. U sljedećoj tabeli ispisani su znaci pojedinih izraza pod znakom apsolutne vrijednosti:

	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 4$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

1° U intervalu $(-\infty, -2]$ je

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 8.$$

Ova funkcija ima minimum za $x = \frac{1}{2}$. Pošto je $\frac{1}{2}$ desno od intervala $(-\infty, -2]$, funkcija u tome intervalu opada i ima najmanju vrijednost u desnom kraju $x = -2$ toga intervala, i to $f(-2) = 4$, što je prikazano na slici 14.24.

2° U intervalu $[-2, -1]$ je $f(x) = 4$.

3° U intervalu $[-1, 1]$ je $f(x) = -2x^2 + 2x + 8$. Pošto je $a < 0$ i $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$, funkcija ima najmanju vrijednost u lijevom kraju intervala, i to $f(-1) = 4$.

4° Ako je $1 \leqslant x \leqslant 2$, tada je $f(x) = 2x + 6$, i tada je $f(x)_{\min} = f(1) = 8$.

5° Za $x \geqslant 2$ je $f(x)_{\min} = f(2) = 10$.

Odgovor:

$$f(x)_{\min} = 4, \quad x \in [-2, -1].$$

14.37. a) $[f(x)]_{\max} < 0 \Leftrightarrow (|k| < 1 \wedge -(k-3)^2 > 0)$, što nije moguće ni za koju vrijednost parametra k.

b) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ za $k < -1$.

$x_1 \in Z^-$ ako je $k \in \{-1, -2, -5\}$;

$x_2 \in Z^-$ ako je $k \in \{-2, -3, -4, -5, -7, -13\}$.

$(x_1 \in Z^- \wedge x_2 \in Z^-) \Leftrightarrow k \in \{-2, -5\}$.

14.38. Nule x_1 i x_2 su realne ako je $p^2 \geq 4q$, a tada su realne i nule $x_1 + 1$ i $x_2 + 1$ polinoma $g(x)$. Parametri p i q moraju zadovoljavati uslove

$$x_1 + x_2 = -p, \tag{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 = q, \tag{2}$$

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = p^2, \tag{3}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = pq. \tag{4}$$

Iz uslova (3) i (1) slijedi $-p + 2 = p^2$, a iz uslova (4), (2) i (1) slijedi $q - p + 1 = pq$.

Rezultat:

$p_1 = -2$, $q_1 = -1$;

$p_2 = 1$, q_2 je proizvoljan realan broj koji zadovoljava uslov $p^2 \geq 4q$, tj. $q \leq \frac{1}{4}$.

14.39. *Prvo rješenje.* Pošto se x_1 može napisati u obliku $-4 + \sqrt{15}$, to je $x_2 = -p + 4 - \sqrt{15}$. Dalje je $q = x_1 \cdot x_2 = (8 - p)\sqrt{15} + 4p - 31$, pa je

$$q - 4p + 31 = (8 - p)\sqrt{15}.$$

Pošto je $p, q \in Q$, izraz $q - 4p + 31$ je racionalan, pa mora biti racionalan i brojevni izraz $(8 - p)\sqrt{15}$, a to je moguće ako i samo ako je $p = 8$, a tada je $q = 1$. Tražena jednačina je

$$x^2 + 8x + 1 = 0.$$

Drugo rješenje: Ako kvadratna jednačina sa racionalnim koeficijentima ima jedno rješenje $x_1 = -4 + \sqrt{15}$, onda ona ima drugo rješenje $x_2 = -4 - \sqrt{15}$. Zato je $p = 8$, $q = 1$.

14.40. Da bi bilo $x_1 : x_2 = 3:2$, potrebno je da je diskriminanta $D > 0$ (omjer konjugovano-kompleksnih imaginarnih brojeva ne može biti realan).

Iz uslova da je $x_2 = \frac{2}{3}x_1$ i date jednačine slijede jednakosti

$$\frac{5}{3}x_1 = -\frac{5m + 1}{2m - 1} \quad \text{i} \quad \frac{2}{3}x_1^2 = \frac{3m + 1}{2m - 1},$$

odakle se dobije da je $m = -\frac{31}{85}$. Ova vrijednost zadovoljava uslov $D > 0$, pa je vrijednost $m = -\frac{31}{85}$ rješenje zadatka.

14.41. a) Uslovima $p > 0$ i $q > 0$ treba dodati uslov $D \geq 0$, pa se dobije da je $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

b) $k \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Uslov $D \geq 0$ ovdje nije potreban, jer je $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \in R$.

14.42. a) $P = (1 + k)^2 \cdot \frac{c}{a} - k \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

b) Iz uslova da je $x_1 = kx_2$ slijedi da je proizvod $P = 0$, tj.

$$(1 + k)^2 ac - kb^2 = 0, \tag{1}$$

i ovo je traženi uslov.

c) 1° Ako je $k \neq -1$, tada je iz jednakosti (1) $c = \frac{kb^2}{(1 + k)^2 a}$, pa je diskriminanta date jednačine

$$D = \left[\frac{b(1 - k)}{1 + k}\right]^2.$$

Pošto je $D \geq 0$ za sve vrijednosti $k \neq -1$, rješenja $x_{1,2}$ su realna, a pošto je $\sqrt{D} = \left|\frac{b(1 - k)}{1 + k}\right|$, ta su rješenja racionalna.

2° Ako je $k = -1$, iz jednakosti (1) slijedi da je $kb^2 = 0$, tj. $b = 0$, pa je

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Pošto su za $k = -1$, prema (1), a i c proizvoljni racionalni brojevi (i $a \neq 0$), to $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ nije uvijek ni realan pa ni racionalan broj.

14.43. $D \geqslant 0$ ako je $-\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$, pa je $-\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \cdot \frac{3m+1}{m} > 0$ ako je $m \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

14.44. a) $D \geqslant 0$ ako je $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$. Ako je $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$, tada je $x_1 < 0$ i $x_2 < 0$. Ako je $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{3}\pi\right)$, tada x_1 i x_2 imaju različit znak.

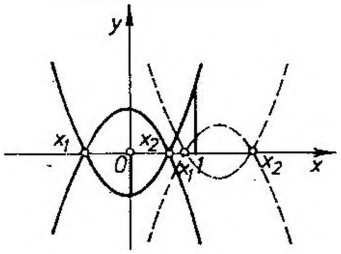
Ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ili $\alpha = \frac{3}{2}\pi$, jedno je rješenje -1, a drugo 0.

b) $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ ili $\alpha = \frac{7}{6}\pi$. $x_1^2 + x_2^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}8$.

14.45. a) $(x_1 < 0 \wedge x_2 < 0) \Leftrightarrow (D \geqslant 0 \wedge -p < 0 \wedge q > 0) \Leftrightarrow k < -1$.
$x_1 \in Z^- \Leftrightarrow k \in \{-2, -3, -4, -5, -7, -13\}$;
$x_2 \in Z^- \Leftrightarrow k \in \{0, -1, -2, -5\}$.
$k_1 = -2$, $f_1(x) = 3x^2 + 42x + 72$;
$k_2 = -5$, $f_2(x) = 24x^2 + 96x + 72$.
b) $k = 3$, $f(x) = 8x^2 - 48x + 72$.

14.4. POLOŽAJ NULA KVADRATNE FUNKCIJE PREMA DATOM RAZMAKU

14.46. Prema 14.4. a) (ili prema slici 14.25) imamo:
$[x_1 \in (0, 1) \vee x_2 \in (0, 1)] \Leftrightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6k(-k^2 + 6k - 5) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k(k^2 - 6k + 5) > 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [k > 0 \wedge (k < 1 \vee k > 5)] \vee$
$\vee (k < 0 \wedge 1 < k < 5) \Leftrightarrow 0 < k < 1 \vee k > 5$.



Sl. 14.25.

14.47. a) Prema 14.4. b) važi:

$$(x_1 < 2 < 3 < x_2) \Leftrightarrow (af(2) < 0 \wedge af(3) < 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 < m < 5.$$

b) Odgovor je negativan, jer se iz uslova $-\frac{b}{2a} = \frac{2+3}{2}$ dobije $m = \frac{16}{3}$, ali $\frac{16}{3} \notin (2, 5)$. Uvjeriti se da za $m = \frac{16}{3}$ funkcija nema realne nule.

14.48. *Prvi način.*

$$(0 < x_1 \leqslant x_2) \Leftrightarrow \left(D \geqslant 0 \wedge af(0) > 0 \wedge -\frac{b}{2a} > 0\right).$$

Drugi način.
$(0 < x_1 \leqslant x_2) \Leftrightarrow (D \geqslant 0 \wedge p < 0 \wedge q > 0)$.
Rezultat:

$$k \in (-\infty, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right].$$

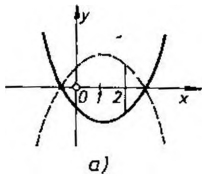
14.49. Prema slici 14.26. imamo:

a) $(x_1 < 2 < x_2) \Leftrightarrow af(2) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < \frac{9}{5}$.

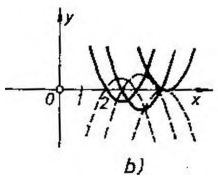
b) $(2 \leqslant x_1 \leqslant x_2) \Leftrightarrow \left(D \geqslant 0 \wedge af(2) \geqslant 0 \wedge -\frac{b}{2a} > 2 \right) \Leftrightarrow \frac{9}{5} \leqslant m \leqslant 2$.

Rezultat:

$$m \in \left(\frac{3}{2}, 2 \right].$$

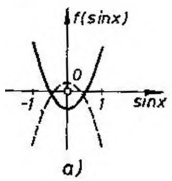


a)

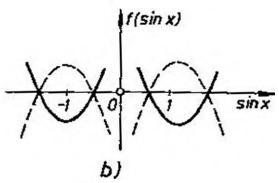


b)

Sl. 14.26.



a)



b)

Sl. 14.27.

14.50. Prema slici 14.27. imamo:

a) $-1 \leqslant (\sin x)_1 \leqslant (\sin x)_2 \leqslant 1 \Leftrightarrow (D \geqslant 0 \wedge af(-1) \geqslant 0 \wedge af(1) \geqslant 0 \wedge -1 \leqslant -\frac{b}{2a} \leqslant 1$, pa se dobije $k = 0$ ili $1 \leqslant k \leqslant 2$.

b) $[(\sin x)_1 \leqslant -1 \leqslant (\sin x)_2 \leqslant 1 \vee -1 \leqslant (\sin x)_1 \leqslant 1 \leqslant (\sin x)_2] \Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) \leqslant 0$, odakle se dobije $k \leqslant 0$ ili $k \geqslant 2$.

Rezultat:

$$k \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).$$

14.51. Data jednačina se može svesti na jednačinu

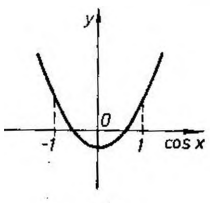
$$f(\cos x) = 2\cos^2 x - 2m \cos x - 1 = 0.$$

Zato, prema slici 14.28, imamo:

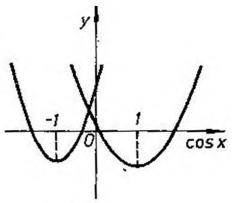
a) $[-1 \leqslant (\cos x)_1 \leqslant (\cos x)_2 \leqslant 1] \Leftrightarrow \left[D \geqslant 0 \wedge af(-1) \geqslant 0 \wedge af(1) \geqslant 0 \wedge -1 \leqslant -\frac{b}{2a} \leqslant 1 \right]$, pa se dobije da je $-\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant \frac{1}{2}$.

b) $[-1 \leqslant (\cos x)_1 \leqslant \vee -1 \leqslant (\cos x)_2 \leqslant 1] \Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) \leqslant 0$, odakle slijedi da je $|m| \geqslant \frac{1}{2}$.

Rezultat: Data jednačina ima rješenja za sve vrijednosti $m \in R$.

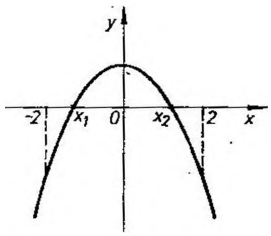


a)



b)

Sl. 14.28.



Sl. 14.29.

14.52. Očito je da grafik mora izgledati kao na slici 14.29. tj. mora biti

$$(1) \qquad a < 0 \wedge -2 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 2.$$

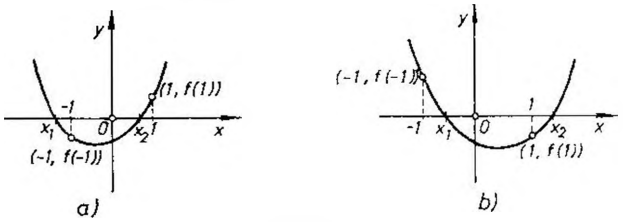
Prvi način. Uslovima (1) ekvivalentni su uslovi

$$D \geqslant 0 \wedge k < 0 \wedge f(-2) \leqslant 0 \wedge f(2) \leqslant 0 \wedge -2 \leqslant -\frac{b}{2a} \leqslant 2,$$

odakle slijedi da je $-2 \leqslant k \leqslant -\frac{1}{2}$.

Drugi način. Pošto je $D = (1 + k^2)^2$, izrazi za nule x_1 i x_2 su jednostavni racionalni izrazi, pa je jednostavnije direktno riješiti sistem nejednačina koji slijedi iz uslova (1).

14.53. $(x_1 < -1 < x_2 < 1) \vee (-1 < x_1 < 1 < x_2) \Leftrightarrow (|x_1| > 1 > |x_2|) \vee (|x_1| < 1 < |x_2|) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(-1) \cdot f(1) < 0$ (sl. 14.30)



Sl. 14.30.

Rezultat:

$$k \in (-2, -1) \cup (1, 2).$$

14.54. a) Uzeti $k_1 \neq k_2$, pa zadatak svesti na posmatranje jednakosti $(k_1 - k_2)(x - 1)^2 = 0$. Dobije se tačka $M(1, -2)$.

b) $k = 1$.

c) $(0 < x_1 \leqslant x_2) \Leftrightarrow \left(D \geqslant 0 \wedge af(0) > 0 \wedge -\frac{b}{2a} > 0 \right)$. Ovi uslovi su ekvivalentni uslovima $D \geqslant 0 \wedge -p > 0 \wedge q > 0$. Dobije se da je $k > 5$.

15. NEKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE VIŠEG STEPENA. NEKI SISTEMI JEDNAČINA I NEJEDNAČINA DRUGOG I VIŠEG STEPENA

15.1. JEDNAČINE VIŠEG STEPENA

15.1. a) $x^3 - 1 = 0$[1] $\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$,

$$x_1 = 1,\ x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i;$$

b) $x_1 = -1,\ x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$

15.2. a) $27x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (3x)^3 - 2^3 = 0$,

$$x_1 = \frac{2}{3},\quad x_{2,3} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} i.$$

b) $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\, y,\ 2\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\, y\right)^3 + 5 = 0,\ 5y^3 + 5 = 0,\ y^3 + 1 = 0$ itd.

$$x_1 = -\sqrt[3]{\frac{5}{2}},\ x_{2,3} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right).$$

15.3. a) $x^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2+2)^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = 0.$

$$x_{1,2} = 1 \pm i,\ x_{3,4} = -1 \pm i.$$

b) $x^4 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0,$

$$x_{1,2} = \sqrt{3},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}\, i.$$

15.4. a) $x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$ itd.

b) $x = ui,$

$(ui)^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow u^6 - 1 = 0$ itd.

15.5. a) Napomenimo da se jednačina oblika

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,\ (a \neq 0),$$

naziva *bikvadratnom* i njeno rješavanje se svodi na rješavanje dviju kvadratnih jednačina uvođenjem nove nepoznate z stavljajući $x^2 = z$.

Tako u slučaju a) dobijemo jednačinu

$$z^2 - 17z + 16 = 0,$$

čija su rješenja $z_1 = 1,\ z_2 = 16$. Rješenja date jednačine su brojevi $\pm 1,\ \pm 4$.

---

[1] Jednačine u zadacima 15.1.—15.4. su primjeri *binomne jednačine*, čiji je opšti oblik $ax^n + b = 0$ i čije je trigonometrijsko rješenje dato u 11.2. Inače, smjenom

$x = y\sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|}$ (odnosno $x = y\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$ za n paran i $\frac{b}{a} < 0$) ova se jednačina svodi na $y^n + 1 = 0$ (odnosno na $y^n - 1 = 0$), a zatim na niži stepen rastavljanjem lijeve strane na faktore.

b) Stavljajući $n^2 = m$, dobijemo $m^2 - 11m + 30 = 0$, odakle je $m_1 = 5$, $m_2 = 6$, odnosno $n^2 = 5$, $n^2 = 6$. Kako $n_{1,2} = \pm\sqrt{5}$ i $n_{3,4} = \pm\sqrt{6}$ nisu prirodni brojevi, to data jednačina nema rješenja u skupu N.

15.6. $8(x^3)^2 + 7x^3 - 1 = 0,$

$(x^3)_1 = -1, \quad (x^3)_2 = \frac{1}{8},$

$x^3 + 1 = 0 \vee x^3 - \frac{1}{8} = 0,$ itd.

Primjedba. Ovo je primjer jednačine oblika

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

koja se svodi na kvadratnu jednačinu smjenom $x^n = y$.

15.7. Data jednačina pripada klasi *simetričnih jednačina* trećeg stepena čiji je opšti oblik

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \text{ ili } ax^3 + bx^2 - bx - a = 0, \quad (a \neq 0).$$

Grupisanjem članova sa jednakim koeficijentima dobijemo:

$$3(x^3 + 1) - 7x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0,$$

odakle slijedi

$$x_1 = -1, \; x_2 = 3, \; x_3 = \frac{1}{3}.$$

15.8. Stavimo li $x = y + \frac{1}{y}$, biće

$$x^3 = \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) + 3\left(y + \frac{1}{y}\right),$$

pa se, nakon sređivanja, dobije jednačina

$$2y^6 + 5y^3 + 2 = 0,$$

$$y^3 = -2, \; y^3 = -\frac{1}{2}, \text{ itd.}$$

15.9. 1° Ako je $a = 0$, tada je $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

2° Neka je $a \neq 0$: tada je i $x \neq 0$ (jer ako je $x = 0$, jednačina se svodi na jednakost $2a = 0$, tj. $a = 0$).

Rješenja date jednačine po a su:

$$a_{1,2} = \frac{-(x^2 + 2) \pm (3x^2 - 2)}{4x},$$

(1) $\quad a = \dfrac{x^2 - 2}{2x}, \qquad$ (2) $\quad a = -x.$

Iz (1) slijedi $x = a \pm \sqrt{a^2 + 2}$, a iz (2) $x = -a$. Ovdje su, međutim, sadržana i rješenja u slučaju 1°, pa su, dakle, rješenja

$$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 + 2}, \; x_3 = -a.$$

15.10. a) $3(x^4 - 1) - 10x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0,$

$$x_{1,2} = \pm 1, \; x_3 = 3, \; x_4 = \frac{1}{3}.$$

b) $$x_{1,2} = \pm 1, \; x_3 = \frac{1}{2}, \; x_4 = 2.$$

Napomena. Ovo su primjeri nepotpune jednačine četvrtog stepena oblika

$$ax^4 + bx^3 \pm bx - a = 0, \quad (a \neq 0),$$

koja se rješava na sličan način.

15.11. a) Data jednačina pripada klasi jednačina oblika

(*) $$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0, \quad (a \neq 0),$$

koja se naziva *simetričnom jednačinom* četvrtog stepena (zato što su koeficijenti članova ove jednačine, smještenih simetrično u odnosu na srednji član, uzajamno jednaki). Kako je $x \neq 0$ (inače bi bilo $a = 0$), možemo jednačinu (*) podijeliti sa x^2, a zatim grupisanjem članova i stavljanjem $x \pm \frac{1}{x} = y$, svesti je na kvadratnu jednačinu.

Dijeljenjem date jednačine sa x^2 dobićemo:

$$x^2 - 2x + 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

odnosno grupisanjem odgovarajućih članova

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$$

Stavimo li $x + \frac{1}{x} = t$ $\left(\text{tada je } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2\right)$ dobije se jednačina

$$t^2 - 2t = 0.$$

Rješenja ove jednačine su $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, pa se nepoznata x dobije rješavanjem jednačina

$$x + \frac{1}{x} = 0, \; x + \frac{1}{x} = 2,$$

odakle se dobije

$$x_{1,2} = 1, \; x_{3,4} = \pm i.$$

b) Pošto je, očito, $x \neq 0$, možemo datu jednačinu podijeliti sa x^2, pa imamo:

$$\left(x - \frac{9}{x} - 6\right)^2 = x - \frac{9}{x} - 4.$$

Stavimo li $x - \frac{9}{x} = y$, dobijemo jednačinu

$$y^2 - 13y + 40 = 0,$$

itd.

$$x_1 = -1, \; x_2 = 9, \; x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}.$$

15.12. Zadana jednačina nije simetrična. Međutim, njenu lijevu stranu možemo rastaviti na proizvod. Naime, ako član $-11x^2$ napišemo u obliku $-2x^2 - 9x^2$, dobićemo

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 9x^2 + 9x + 18 = 0,$$

odakle (grupisanjem) imamo

$$x^2(x^2 - x - 2) - 9(x^2 - x - 2) = 0.$$

tj.

$$(x^2 - 9)(x^2 - x - 2) = 0.$$

odakle dobijemo rješenja:

$$-3, \; -1, \; 2, \; 3.$$

15.13. a) Ako pomnožimo prvi i zadnji faktor proizvoda na lijevoj strani date jednačine, te drugi i treći, dobićemo jednačinu

$$(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 3 = 0.$$

Smjenom $x^2 + 5x = y$ ova jednačina prelazi u jednačinu

$$y^2 + 10y + 21 = 0$$

čija su rješenja

$$y_1 = -3, \; y_2 = -7.$$

Rješenja date jednačine su

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}, \; x_{3,4} = \frac{-5 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

b) Data jednačina je definisana za $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -2$ i ekvivalentna je sa jednačinom

$$\frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{12}.$$

Uvesti smjenu $x^2 + 2x = y$.

Rezultat: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1 + \sqrt{3}i$, $x_4 = -1 - \sqrt{3}i$.

15.14. Data jednačina je ekvivalentna sa jednačinom

$$\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}=n(n-1)$$

i, dalje, sa jednačinom

$$\left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x^2-1}-n(n-1)=0.$$

Rezultat: 1) Za $n\in N\setminus\{2\}$, data jednačina ima (u C) četiri rješenja

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{n}{n-2}},\qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}};$$

2) Za $n=2$, jednačina ima samo dva rješenja

$$x_{1,2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

15.15.* $x^3=[x]+3\Rightarrow x^3=a$. tj. $x=\sqrt[3]{a}$. $a=[x]+3\in Z$.

$$a-3=[x]\leqslant x<[x]+1=a-2\Rightarrow\begin{cases}(a-3)^3\leqslant a, & \text{tj. } a\leqslant 4\\ a<(a-2)^3, & \text{tj. } a\geqslant 4\end{cases}\Rightarrow a=4.$$

Dakle.

$$x=\sqrt[3]{4}.$$

U vezi sa nejednačinom $(a-3)^3\leqslant a$ promatrati graf funkcije $f(a)=(a-3)^3-a$ i zaključiti da je $f(a)>0$ ako je $a>a_1$ i $f(a_1)\geqslant 0$. Na sličan način se rješava nejednačina $a<(a-2)^3$.

15.16.* Jednačina oblika $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ se smjenom $x=y-\frac{a+b}{2}$ svodi na jednačinu:

$$\left(y+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(y-\frac{a-b}{2}\right)^4=c,$$

koja se poslije stepenovanja sa 4 svodi na bikvadratnu jednačinu, jer su koeficijenti uz y^3 i y jednaki nuli.

Rješenja jednačine $(x+3)^4+(x+5)^4=4$ su:

$$x_{1,2,3,4}=-4\pm\sqrt{-3\pm\sqrt{10}}.$$

15.17.* $x=3$, $y=1$.

Uputa. Za $y=1$ data jednačina prelazi u kvadratnu koja ima samo jedno pozitivno rješenje $x=3$. Zatim, primijetiti da, ako je jedan od brojeva x^{2y}, $(x+2)^{2y}$ paran, odnosno neparan, onda je i drugi paran, odnosno neparan. Zaključiti da je $x+1=2k$ i primjenjujući binomni obrazac, pokazati da za $y>1$ data jednačina nema rješenja.

15.2. SISTEMI JEDNAČINA DRUGOG I VIŠEG STEPENA

15.18. a) Na osnovu Vietovih formula nepoznate x i y možemo naći kao rješenja jednačine

$$z^2-5z+6=0,$$

odakle je $z_1=2$, $z_2=3$. Pošto sa z_1 može biti označeno x, kao i y, što važi i za z_2, imamo dva rješenja:

$$x_1=2,\ y_1=3;\quad x_2=3,\ y_2=2.$$

b) $x=y=2$.

15.19. Izraziti iz druge jednačine x, pa uvrstiti u prvu jednačinu. Parovi $(-4,\ -1)$, $(2,\ 1)$ predstavljaju rješenja datog sistema.

15.20. a) *Rješenje:* Prva se jednačina može napisati u obliku:

$$(x + y)^2 - 2xy = 20,$$

i pošto je $2xy = 16$, dobijemo

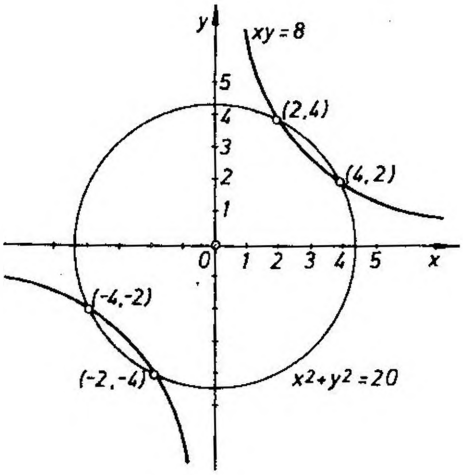
$$(x + y)^2 = 36,\ x + y = \pm 6.$$

Dati sistem ekvivalentan je skupu od ova dva sistema:

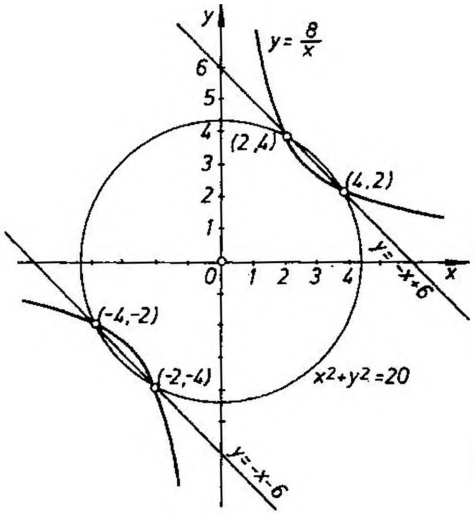
$$(1)\quad \begin{aligned} x + y &= 6, \\ xy &= 8; \end{aligned} \qquad (2)\quad \begin{aligned} x + y &= -6, \\ xy &= 8 \end{aligned}$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \{(-4, -2), (-2, -4), (4, 2), (2, 4)\}.$$



Sl. 15.7.



Sl. 15.8.

Prvoj jednačini datog sistema odgovara u koordinatnom sistemu kružnica središta u koordinatnom početku i radijusu $r = \sqrt{20}$. Drugoj jednačini odgovara jednakostrana hiperbola. Koordinate tačaka presjeka tih linija su parovi nađenih rješenja (sl. 15.7). Rješenjima sistema (1), odnosno (2) odgovaraju tačke presjeka hiperbole i prave $x + y = 6$, odnosno $x + y = -6$ (sl. 15.8).

Inače, sistemi (1) i (2) ekvivalentni su sistemima

$$\begin{aligned} x + y &= 6, \\ x^2 + y^2 &= 20; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= -6, \\ x^2 + y^2 &= 20, \end{aligned}$$

iz kojih bismo dobili ista rješenja. Grafički ovome slučaju odgovaraju tačke presjeka pomenute kružnice i prave $y = -x + 6$, odnosno $y = -x - 6$ (sl. 15.8).

b) Dati sistem ekvivalentan je sistemu

$$\begin{aligned} x^2 + (-y^2) &= -2, \\ x^2 \cdot (-y^2) &= -3, \end{aligned}$$

uz uslov $xy < 0$. Brojevi x^2 i $-y^2$ mogu se naći kao rješenja jednačine

$$z^2 + 2z - 3 = 0.$$

Dobije se:

$$x_1 = 1,\ y_1 = -\sqrt{3};\ x_2 = -1,\ y_2 = \sqrt{3}.$$

15.21. Prvu jednačinu pomnožiti sa xy. Sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{aligned} x + y &= 12, \\ xy &= 32. \end{aligned}$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \{(8, 4), (4, 8)\}.$$

15.22. Kvadriranjem prve jednačine i razvrstavanjem članova dobije se

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy.$$

Ponovnim kvadriranjem, uzimajući u obzir drugu jednačinu, dobije se

$$x^2 y^2 - 2a^2 xy = 0.$$

Odavde je $xy = 0 \vee xy = 2a^2$. Rješavanjem sistema

$$xy = 0, \quad x + y = a \qquad \text{i} \qquad xy = 2a^2, \quad x + y = a$$

dobije se: 1° za $a = 0$, $x = y = 0$;

2° za $a \neq 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = a$; $x_2 = a$, $y_2 = 0$,

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} a, \quad y_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} a.$$

15.23. Ako iz druge jednačine izrazimo x i uvrstimo u prvu jednačinu, dobijemo:

$$y^2 + z^2 + a^2 - 2ay = 0,$$

odnosno

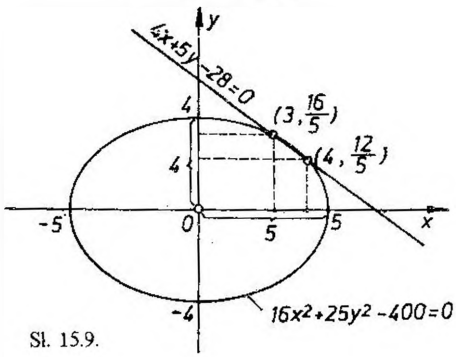
$$z^2 + (y - a)^2 = 0.$$

Ova jednakost je tačna samo ako je

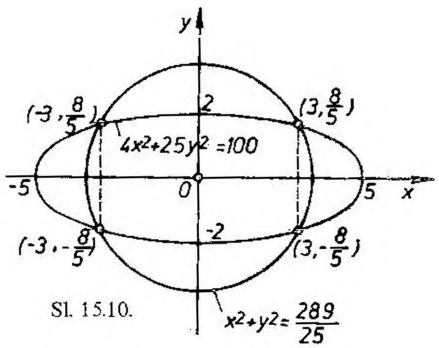
$$z = 0 \text{ i } y = a.$$

Realno rješenje sistema je $x = y = a$, $z = 0$.

15.24. $\mathscr{R} = \left\{\left(3, \frac{16}{5}\right), \left(4, \frac{12}{5}\right)\right\}$ (sl. 15.9).

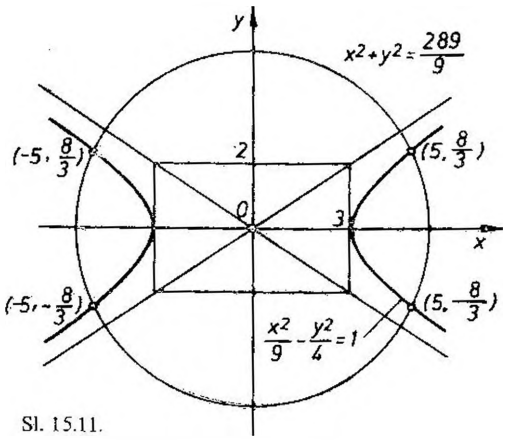


Sl. 15.9.

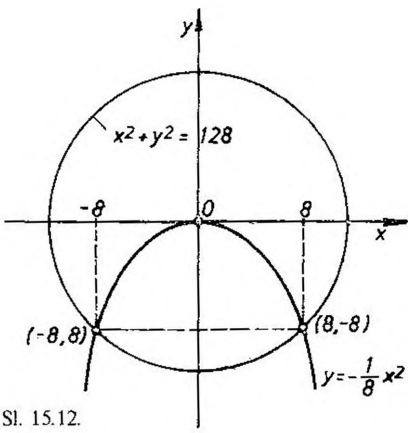


Sl. 15.10.

15.25. a) $\mathscr{R} = \left\{\left(3, \frac{8}{5}\right), \left(3, -\frac{8}{5}\right), \left(-3, \frac{8}{5}\right), \left(-3, -\frac{8}{5}\right)\right\}$ (sl. 15.10).



Sl. 15.11.



Sl. 15.12.

b) $\mathscr{R} = \left\{\left(5, \frac{8}{3}\right), \left(5, -\frac{8}{3}\right), \left(-5, \frac{8}{3}\right), \left(-5, -\frac{8}{3}\right)\right\}$ (sl. 15.11).

c) $\mathscr{R} = \{(8, -8), (-8, -8)\}$ (sl. 15.12).

15.26. Iz prve jednačine slijedi da nije $x = y = 0$, što znači da je $x^2 + y^2 > 0$, pa je

$$a > 0. \tag{1}$$

Dati sistem ekvivalentan je sistemu

$$|x| + |y| = 1 \wedge a + 2|x| \cdot |y| = 1. \tag{2}$$

Zaključiti da je

$$a \leqslant 1. \tag{3}$$

Umjesto sistema (2) rješavati jednačinu

$$z^2 - z + \frac{1-a}{2} = 0, \quad z_1 \geqslant 0, \quad z_2 \geqslant 0,$$

i zaključiti da mora biti

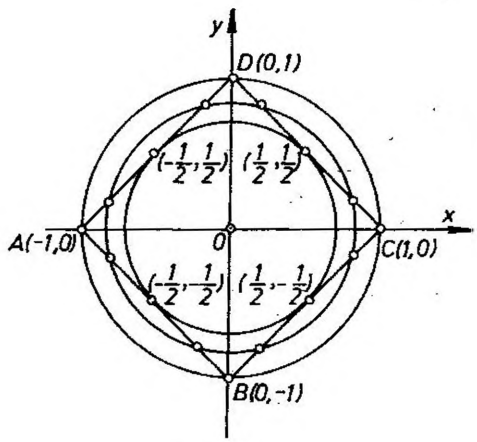
$$a \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Prema (1), (3) i (4) za parametar a imamo uslov

$$\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1.$$

Rezultat:

1° Za $a < \frac{1}{2}$ ili $a > 1$ nema rješenja — kružnica $x^2 + y^2 = a$ je unutar kvadrata $|x| + |y| = 1$, odnosno obuhvata ga (sl. 15.13).



Sl. 15.13.

2° Za $a = \frac{1}{2}$ postoje 4 rješenja:

$$\mathscr{R} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Kružnica $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ dira kvadrat.

3° Za $\frac{1}{2} < a < 1$ imamo 8 rješenja:

$$|x| = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2a-1}),$$

$$|y| = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2a-1}),$$

odnosno

$$|x| = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2a-1}),$$

$$|y| = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2a-1}).$$

Kružnica siječe sve stranice kvadrata u po dvije tačke.

4° Za $a = 1$ imamo 4 rješenja:

$$\mathscr{R} = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}.$$

Kružnica prolazi tjemenima kvadrata.

15.27. Iz druge jednačine sistema zaključujemo da je $y \neq 0$, pa možemo prvu jednačinu podijeliti sa y^2, te imamo:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\frac{x}{y} - 18 = 0,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = -\frac{9}{2}, \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2 = 2.$$

Dati sistem ekvivalentan je skupu od ova dva sistema

$$\frac{x}{y} = -\frac{9}{2}, \qquad \frac{x}{y} = 2,$$
$$xy + y^2 - 12 = 0; \qquad xy + y^2 - 12 = 0,$$

od kojih prvi nema realnih rješenja.

Rezultat:
$x_1 = 4, y_1 = 2; \quad x_2 = -4, y_2 = -2.$

15.28. Druga jednačina sistema ekvivalentna je jednačini $x^2 = 4y^2$.

$$\mathcal{R} = \{(6, 3), (6, -3), (-6, 3), (-6, -3)\}.$$

Primjedba. Ovaj sistem jednačina može se riješiti i na ovaj način: Stavljanjem $\frac{x+y}{x-y} = t$, druga jednačina postaje $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$, odnosno $t^2 - \frac{10}{3}t + 1 = 0$, odakle je $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = 3$. Zato treba riješiti dva sistema:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{x+y}{x-y} = 3,$$
$$x^2 + y^2 = 45 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 = 45.$$

15.29. a) Ako drugu jednačinu pomnožimo sa (-6) i saberemo sa prvom, dobijemo homogenu jednačinu

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0,$$

odakle, dijeleći, npr., sa $y^2 (y \neq 0)$ dobijemo

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 6 = 0.$$

Odavde je $\left(\frac{x}{y}\right)_1 = 2, \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2 = 3,$ pa treba riješiti ova dva sistema jednačina:

$$x^2 + xy = 12, \qquad x^2 + xy = 12,$$
$$\frac{x}{y} = 2 \quad \text{i} \quad \frac{x}{y} = 3,$$

odakle je $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$, $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; $x_{3,4} = \pm 3$, $y_{3,4} = \pm 1$. Dakle, dati sistem ima rješenja

$$(3, 1), (-3, -1), (2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{i} \quad (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

b) *Rješenja:* $\left(\frac{4}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right), (-2, -1), (2, 1).$

15.30. Druga jednačina sistema je ekvivalentna sa

$$(x^2 + 2xy) + (xy + 2y^2) + 2(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow (x + 2y)(x + y + 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 2y = 0 \vee x + y + 2 = 0).$$

Tako se dobiju sljedeća dva sistema jednačina:

$$x + 2y = 0, \qquad x + y + 2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 + 3y = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - y^2 + 3y = 0.$$

Rezultat: $x_1 = 0, y_1 = 0; \quad x_2 = 2, y_2 = -1; \quad x_3 = -\frac{10}{7}, y_3 = -\frac{4}{7}.$

15.31.* Od prve jednačine treba oduzeti drugu pa će se dobiti jednačina

$$5x^2 - 20xy + 20y^2 + 30x - 60y + 65 = 0 \Leftrightarrow 5(x^2 - 4xy + 4y^2) + 30(x - 2y) + 65 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + 6(x - 2y) + 13 = 0.$$

U ovu jednačinu treba uvesti smjenu $z = x - 2y$, pa se dobije kvadratna jednačina po z:

$$z^2 + 6z + 13 = 0.$$

Rezultat:

$$x_1 = \frac{-1 + (4 + \sqrt{10})i}{5}, \qquad y_1 = \frac{14 + (-6 + \sqrt{10})i}{10};$$

$$x_2 = \frac{-1 + (4 - \sqrt{10})i}{5}, \qquad y_2 = \frac{14 - (6 + \sqrt{10})i}{10};$$

$$x_3 = \frac{-1 + (-4 + \sqrt{10})i}{5}, \qquad y_3 = \frac{14 + (6 + \sqrt{10})i}{10};$$

$$x_4 = \frac{-1 + (-4 - \sqrt{10})i}{5}, \qquad y_4 = \frac{14 + (6 - \sqrt{10})i}{10}.$$

15.32. Podijeliti jednu jednačinu sa drugom

$$\mathcal{R} = \{(3, 2), (2, 3), (-3, -2), (-2, -3)\}.$$

15.33. *Rješenje.* Kvadriranjem jednačine (2) dobijemo

$$(x + y)^2 = \frac{x^2 y^2}{4},$$

pa uvrštavajući u jednačinu (1) imamo:

$$x^4 + y^4 = \frac{17}{4}x^2 y^2,$$

$$(x^2 - y^2)^2 = \frac{9}{4}x^2 y^2,$$

$$x^2 - y^2 = \pm\frac{3}{2}xy.$$

Odavde i iz jednačine (2) imamo:

$$x^2 - y^2 = \pm 3(x + y),$$

(3)
$$(x + y)(x - y \pm 3) = 0$$

Ako je $x + y = 0$, tada je iz (2) $xy = 0$, pa se dobije

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0.$$

Ako je u jednačini (3) $x - y = 3$, iz jednačine (2) slijedi jednačina

$$x^2 - 7x + 6 = 0,$$

pa se dobije

$$x_2 = 1, \quad y_2 = -2; \quad x_3 = 6, \quad y_3 = 3.$$

Ako je u jednačini (3) $x - y = -3$, tada slijedi

$$x_4 = -2, \quad y_4 = 1; \quad x_5 = 3, \quad y_5 = 6.$$

Nakon provjere (primijetimo da smo se služili jednačinom dobijenom kvadriranjem iz (2), a ta jednačina nije ekvivalentna sa (2)!) utvrđujemo da je skup rješenja

$$\mathcal{R} = \{(0, 0), (1, -2), (6, 3), (-2, 1)(3, 6)\}.$$

15.34.* Očigledno rješenje sistema je

$$x_1 = 0, y_1 = 0.$$

U daljnjem radu je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ (jer $x \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$), pa dijeleći prvu jednačinu sa xy a drugu sa $x^2 y^2$ dobijemo

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 18,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 208.$$

Stavimo li $x + \frac{1}{x} = u, \quad y + \frac{1}{y} = v,$

dati sistem poprima oblik

$$u + v = 18 \wedge u^2 + v^2 = 212,$$

odakle slijedi

$$u_1 = 4,\ v_1 = 14;\ u_2 = 14,\ v_2 = 4.$$

Dalje treba riješiti ova dva sistema:

$$x + \frac{1}{x} = 4, \qquad x + \frac{1}{x} = 14,$$
$$y + \frac{1}{y} = 14; \qquad y + \frac{1}{y} = 4.$$

Dobijemo svega 9 rješenja:

$(0, 0)$; $(2 + \sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3})$; $(2 + \sqrt{3}, 7 - 4\sqrt{3})$; $(2 - \sqrt{3}, 7 + 4\sqrt{3})$;
$(2 - \sqrt{3}, 7 - 4\sqrt{3})$; $(7 + 4\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$; $(7 + 4\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$;
$(7 - 4\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$; $(7 - 4\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$.

15.35. Iz prve jednačine je $z = \frac{1}{xy}$ (jer je $x \neq 0, y \neq 0$), pa zamjenom u drugu jednačinu, dobijemo jednakost $4 = 4$, tj. dati sistem je ekvivalentan sa $z = \frac{1}{xy}$, $4 = 4$. Prema tome, rješenja datog sistema su sve trojke $(x, y, z) \in R^3$ za koje je $z = \frac{1}{xy}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$.

15.36. a) Ako prvu jednačinu kvadriramo i oduzememo od druge jednačine datog sistema, dobijemo jednačinu

$$2xy - 3xz + 6yz = 54.$$

Odavde i iz treće jednačine sistema dobijemo

(1) $$xy - 2y^2 + 3yz = 27.$$

Ako prvu jednačinu datog sistema pomnožimo sa y i oduzmemo od jednačine (1), dobijemo

$$y = 3.$$

Sada iz prve i treće jednačine sistema slijedi

$$x + 3z = 15 \wedge xz = 12,$$

odakle je

$$x_1 = 3,\ z_1 = 4,\ x_2 = 12,\ z_2 = 1.$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \{(3, 3, 4), (12, 3, 1)\}.$$

b) Ako od druge jednačine sistema oduzmemo prvu, a drugu od treće, dobićemo, nakon rastavljanja lijevih strana na faktore, jednačine:

$$(z - x)(x + y + z) = 12,$$
$$(y - z)(x + y + z) = 6.$$

Dijeljenjem ovih dviju jednačina, (to možemo, jer sigurno $x \neq y$ i $x + y + z \neq 0$), dobijemo

$$\frac{z - x}{y - z} = 2,$$

ili

$$z = 2y - x.$$

Ako prepišemo prvu jednačinu sistema, a u drugu uvrstimo $z = 2y - x$, dobićemo sistem

$$x^2 + xy + y^2 = 7,$$
$$x^2 - 5xy + 7y^2 = 19,$$

čija su rješenja:

$$x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm \frac{5\sqrt{3}}{3},\ y_{1,2} = \pm 2,\ y_{3,4} = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Za z tada dobijemo: $z_{1,2} = \pm 3,\ z_{3,4} = \mp \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

15.37.* Primijetiti da sve tri nepoznate x_1, x_2, x_3, mogu biti jednake nuli samo istovremeno. U slučaju kada je $x_1 x_2 x_3 \neq 0$, dati sistem napisati u obliku

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1+x_1^2}{2x_1^2}, \frac{1}{x_3} = \frac{1+x_2^2}{2x_2^2}, \frac{1}{x_1} = \frac{1+x_3^2}{2x_3^2}.$$

Množeći obje strane svake jednačine sa 2 i sabirajući odgovarajuće strane, dobiće se

$$\left(1-\frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{x_2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{x_3}\right)^2 = 0$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}.$$

15.38. Saberemo li prvu i drugu jednačinu datog sistema, zatim prvu i treću i, najzad, drugu i treću, dobijemo sistem

$$x^3 = xyz + 2 \wedge y^3 = xyz - 3 \wedge z^3 = xyz + 3.$$

Ako sve tri ove jednačine međusobno pomnožimo i označimo xyz sa u, dobijemo jednačinu

$$2u^2 - 9u - 18 = 0,$$

odakle slijedi

$$u_1 = 6, \; u_2 = -\frac{3}{2}.$$

Skup rješenja datog sistema je:

$$\mathscr{R} = \left\{(2, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)\right\}.$$

15.39. Za neparno n je: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \pm 1$;
Za parno n je : $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = t$,

$$x_2 = x_4 = \ldots = x_n = \frac{1}{t}, (t \neq 0).$$

15.40. Dati sistem se može napisati u obliku

$$y + z = x^3 - x,$$
$$yz = x^2,$$

pa su y i z rješenja jednačine

$$u^2 + (x - x^3)u + x^2 = 0.$$

Pošto je $x \neq 0$, diskriminanta $D = x^2[(1-x^2)^2 - 4] \geqslant 0$ ako je $x^2 \geqslant 3$ (jer slučaj $1 - x^2 \geqslant 2$ otpada).

15.41. Napisati sistem u obliku

$$y + z = 5 - x,$$
$$yz + x(z + y) = 8,$$

odnosno

$$y + z = 5 - x,$$
$$yz = 8 - x(5 - x),$$

i posmatrati jednačinu

$$u^2 - (5 - x)u + x^2 - 5x + 8 = 0.$$

Iz uslova $-3x^3 + 10x - 7 \geqslant 0$ slijedi $1 \leqslant x \leqslant \frac{7}{3}$.

Pošto su jednačine datog sistema simetrične u odnosu na x, y i z isti zaključak važi za y i z.

15.42.* *Rješenje.* Uočimo da, ako je (x_1, y_1, z_1) rješenje datog sistema, tada je i $(-x_1, -y_1, z_1)$ takođe njegovo rješenje (jer se x i y u sistemu pojavljuju u obliku x^2, y^2 ili xy). Odatle slijedi ovo: da bi sistem imao jedinstveno rješenje, mora biti

$$x = y = 0.$$

Tada sistem poprima oblik

$$z = a \wedge z = b \wedge z^2 = 4,$$

odakle je

$$a = b = 2, \text{ ili } a = b = -2.$$

1° Ako je $a = b = 2$, iz prve dvije jednačine sistema slijedi $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

Za $z = 1$ slijedi sistem

$$xy = 1 \wedge x^2 + y^2 = 3,$$

koji odbacujemo, jer ima 4 rješenja. Znači, slučaj $a = b = 2$ otpada.

2° Ako je $a = b = -2$ slijedi $z_1 = -2$, $z_2 = 1$.

Uvjeriti se da za $z_1 = -2$ dati sistem ima tačno jedno rješenje $(0, 0, -2)$, a za $z_2 = 1$ sistem uopšte nema realna rješenja.

Rezultat:

$$a = b = -2.$$

15.3. NEJEDNAČINE VIŠEG STEPENA

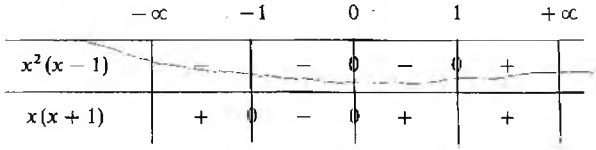
15.43. a) Kako je

$$x^3 - x^2 < x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 1) < 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge x^2 - 2x - 1 < 0) \vee$$
$$\vee (x < 0 \wedge x^2 - 2x - 1 > 0),$$

to, ispitivanjem (analitički, tabelarno ili grafički) znaka kvadratnog trinoma $x^2 - 2x - 1$, dobijemo skup rješenja date nejednačine

$$\mathscr{R} = (-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (0, 1 + \sqrt{2}).$$

b) *Rješenje*. Nule izraza $x^3 - x^2$ su 0 i 1, a nule izraza $x^2 + x$ su -1 i 0, pa treba nejednačinu posmatrati u razmacima $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$ i $[1, +\infty)$. Odredimo znake izraza u tim razmacima:



1° Data nejednačina u intervalu $(-\infty, -1)$ poprima oblik $x(x^2 + 1) > 0$, pa ona u tome intervalu nema rješenja.

2° U intervalu $[-1, 0)$ dobijemo nejednačinu

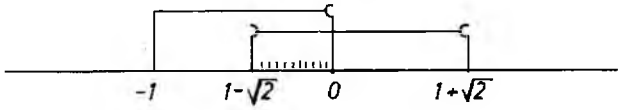
$$x(x^2 - 2x - 1) > 0,$$

i pošto je $x \in [-1, 0)$, slijedi da mora biti

$$x^2 - 2x - 1 < 0,$$

tj.

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2},$$



dakle

$$x \in (1 - \sqrt{2}, 0).$$

3° U intervalu $[0, 1)$ dobijemo rješenja $0 < x < 1$, a u intervalu $[1, +\infty)$ dobijemo rješenja

$$1 \leqslant x < 1 + \sqrt{2}.$$

Skup rješenja date nejednačine je

$$\mathscr{R} = (1 - \sqrt{2}, 0) \cup (0, 1 + \sqrt{2}).$$

15.44. a) Vrijedi identitet:

$$x^4 + 9x^2 - 10 = x^4 + 9x^2 - 9 - 1 = (x^4 - 1) + 9(x^2 - 1) =$$
$$= (x^2 - 1)(x^2 + 10) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 10).$$

Pošto je $x^2 + 10 > 0$ za sve vrijednosti $x \in R$, dovoljno je naći rješenja nejednačine

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < 0.$$
$$\mathscr{R} = (-1, 1).$$

b) $$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = x^4 - x^3 - x^2 - 6x^2 + x + 6 =$$
$$= x^3(x-1) - x(x-1) - 6(x^2-1) =$$
$$= (x-1)(x^3 - 7x - 6) = \ldots =$$
$$= (x-1)(x+1)(x+2)(x-3) < 0.$$

Rješavajući nejednačinu pomoću tabele, dobijemo rješenja

$$x \in (-2, -1) \cup (1, 3).$$

15.45. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 11x + 30) > 0,$$

odnosno nejednačini

$$(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) > 0.$$
$$\mathscr{R} = (4, 5) \cup (6, +\infty).$$

15.46. a) *Rješenje.* $\dfrac{(x^2+x+1)(4-x^2)}{2x^2+3x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x^2+x+1)(2-x)(2+x)}{(x+2)(2x-1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2-x}{2x-1} \geqslant 0 \wedge x \neq -2\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \leqslant 2,$$

tj. skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left\{x \in R: \frac{1}{2} < x \leqslant 2\right\}.$$

b) Data nejednačina je ekvivalentna nejednačini

$$\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{x(1-x+x^2)} > \frac{(1-x)(1+x)}{x}.$$

Kako je $1 - x + x^2 > 0$ za sve $x \in R$, data nejednačina se svodi na

$$\frac{1+x-1+x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow (1 + x > 0 \wedge x \neq 0).$$

Dakle, skup rješenja date nejednačine je

$$\mathscr{R} = (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

15.47. a) *Rješenje.* Definiciono područje date nejednačine je

(2) $$D = \{x \in R: 3x + 2 \neq 0 \wedge x \neq 0\} = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty).$$

Razlikovaćemo slučaj kada je desna strana nejednačine (1) negativna i slučaj kada je ta strana pozitivna, tj. kada je: 1° $x < 0$; 2° $x > 0$.

1° Za $x < 0$ je $\dfrac{1}{x} < 0$, pa je, zbog $\left|\dfrac{x+4}{3x+2}\right| \geqslant 0$ za sve $x \in R \setminus \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$, nejednačina (1) zadovoljena za sve $x \in \left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$.

2° Za $x > 0$ data nejednačina, na osnovu osobine (9.12), ekvivalentna je sa

(3) $$\frac{x+4}{3x+2} > \frac{1}{x} \vee \frac{x+4}{3x+2} < -\frac{1}{x}.$$

Rješenja nejednačine (1) (za $x > 0$) jesu rješenja prve nejednačine u (3) posebno i druge nejednačine u (3) posebno. Međutim, druga nejednačina u (3) nema rješenja u intervalu $(0, +\infty)$, pa se (1) svodi na prvu nejednačinu u (3), koja je ekvivalentna nejednačini $\dfrac{x^2+x-2}{x(3x+2)} > 0$, odnosno nejednačini

(4) $$\frac{(x-1)(x+2)}{x(3x+2)} > 0.$$

U intervalu $(0, +\infty)$ nejednačina (4) ima rješenja $x > 1$.

Dakle, skup rješenja date nejednačine je

$$\mathscr{R} = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (1, +\infty).$$

b) $x \in (0, 2) \cup (2, 3)$.

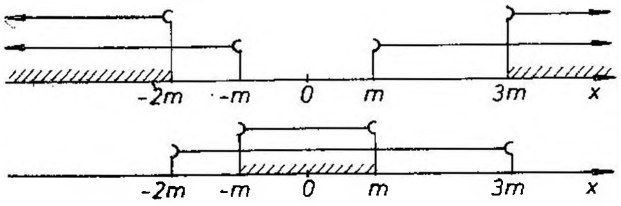
15.48. *Rješenje.* Definiciono područje.

(1) $x \neq \pm m$

$$\frac{x^2 - mx - 6m^2}{x^2 - m^2} > 0 \Leftrightarrow$$

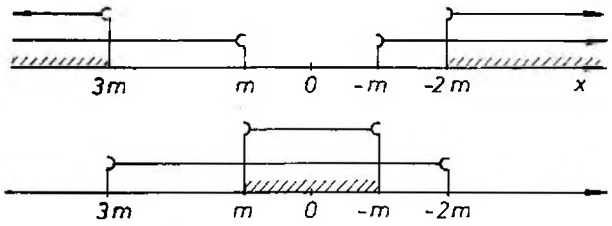
$$\Leftrightarrow (x^2 - mx - 6m^2 > 0 \wedge x^2 - m^2 > 0) \vee (x^2 - mx - 6m^2 < 0 \wedge x^2 - m^2 < 0).$$

1° Za $m > 0$ imamo:



$$x \in (-\infty, -2m) \cup (3m, +\infty) \cup (-m, m).$$

2° Za $m < 0$ imamo:

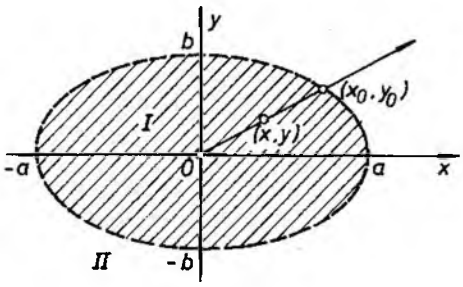


$$m \in (-\infty, 3m) \cup (-2m, +\infty) \cup (m, -m)$$

3° Za $m = 0$ (tada je, zbog (1), $x \neq 0$) imamo nejednačinu $\frac{x}{x} > 0$, što je tačno za sve $x \neq 0$.

15.4. NEJEDNAČINE DRUGOG STEPENA SA DVIJE NEPOZNANICE. SISTEMI NEJEDNAČINA DRUGOG I VIŠEG STEPENA

15.49. Data elipsa dijeli ravan na unutarnju oblast (sl. 15.14) I i vanjsku oblast II. U oblasti I je tačna nejednakost $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, a u II nejednakost $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$. Neka je, naime, $(x, y) \in$ I. Tada zraka iz $(0, 0)$ koja prolazi tačkom (x, y) siječe elipsu u nekoj tački (x_0, y_0) za koju je $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Osim toga $(x, y) = (tx_0, ty_0)$, $0 \leqq t < 1$, pa je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = t^2 < 1$. Slično se vidi da za $(x, y) \in$ II vrijedi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$.



Sl. 15.14.

Znači, skup rješenja čine parovi koordinata (x, y) svih tačaka oblasti I.

Algebarsko rješenje.

(1) $$y^2 < \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

1° Ako je $x^2 \geqslant a^2$, tj. $|x| \geqslant |a|$, nejednačina (1) nije tačna ni za jednu vrijednost $y \in R$.

2° Ako je $|x| < a$, tada iz (1) slijedi

$$|y| < \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

tj.

(2) $$-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} < y < \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Formule (2) upravo opisuju unutarnju oblast elipse.

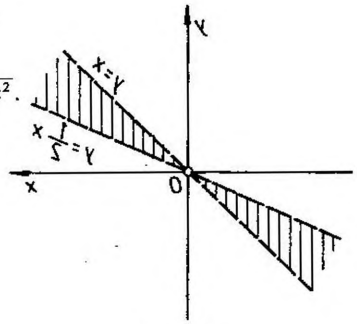
b) $x^2 - 3xy + 2y^2 < 0 \Leftrightarrow (x - y)(x - 2y) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - y > 0 \wedge x - 2y < 0) \vee (x - y < 0 \wedge$

$\wedge x - 2y > 0)$.

$x > 0 \quad \frac{1}{2}x < y < x;$

$x < 0, \; x < y < \frac{1}{2}x$ (sl. 15.15).



Sl. 15.15.

15.50. a) Rješenja nejednačine $x^2 + x - 12 \leqslant 0$ su svi $x \in R$ za koje je

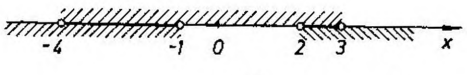
(1) $$-4 \leqslant x \leqslant 3.$$

a rješenja nejednačine $x^2 - x - 2 > 0$ su svi realni brojevi x za koje je

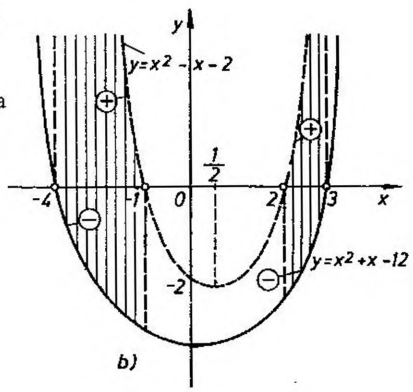
(2) $$x < -1 \vee x > 2.$$

Skup rješenja zadanog sistema, prema slici 15.16.a), čine svi realni brojevi x za koje je $-4 \leqslant x < -1 \vee 2 < x \leqslant 3$, tj.

$$\mathscr{R} = [-4, 1) \cup (2, 3].$$



a)



b)

Sl. 15.16.

Napomena. Dati sistem se može riješiti i direktno grafičkim postupkom. Naime, u sistemu Oxy predstavimo grafike funkcija $y = x^2 + x - 12$, $y = x^2 - x - 2$ i direktno očitamo rješenje sistema, tj. one vrijednosti x za koje je istovremeno prva funkcija nepozitivna, a druga pozitivna (sl. 15.16. b)).

15.51. Pošto je $x^2 - x + 1 > 0$ za sve vrijednosti $x \in R$, dobijemo sistem nejednačina

$$4x^2 + (k-3)x + 1 > 0 \wedge x^2 - (k+2)x + 4 > 0,$$

koje su tačne na skupu R ako i samo ako $k \in (-1, 2)$.

15.52. Pošto je za sve $x \in R$ $x^2 + x + 1 > 0$, množenjem formule $(\forall\, x \in R) -3 < \dfrac{x^2 + (\lambda+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ sa $x^2 + x + 1$, dobije se formula

$$(\forall\, x \in R) \quad -4x^2 - (\lambda+4)x - 4 < 0 < 2x^2 + (2-\lambda)x + 2,$$

odakle slijedi

$$-2 < \lambda < 4.$$

15.53. Ako iz druge jednačine izrazimo y, uvrstimo u prvu nejednačinu i sredimo, dobijemo ekvivalentan sistem

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 &\leqslant 0, \\ y &= a + x. \end{aligned}$$

Nejednačina (1) ima jedno (dvostruko) rješenje za x ako i samo ako je

$$a = 3 \text{ ili } a = -1.$$

Za $a = 3$ iz (1) imamo $x = -2$, a za y imamo $y = a + x = 1$.

Za $a = -1$ je $x^2 = 0$, $x = 0$, $y = -1$.

Prema tome, dati sistem ima tačno jedno rješenje u dva slučaja:

Za $a = 3$ je $x = -2$, $y = 1$,

Za $a = -1$ je $x = 0$, $y = -1$.

15.54. Definiciona oblast sistema je skup $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right] \cup [4, +\infty)$. Rješenja prve nejednačine moraju zadovoljavati uslov $\sqrt{3x^2 - 20x + 32} \leqslant 1$, a druge $x^2 \leqslant 1$.

Na kraju izlazi da rješenja prve nejednačine pripadaju skupu

$$\left[\frac{10 - \sqrt{7}}{3}, \frac{8}{3}\right] \cup \left[4, \frac{10 + \sqrt{7}}{3}\right], \text{ a}$$

rješenja druge skupu $[-1, 1]$, a ti su skupovi disjunktni.

15.55. $x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$, $\quad y > x^2 - 2x - \dfrac{1}{2}$

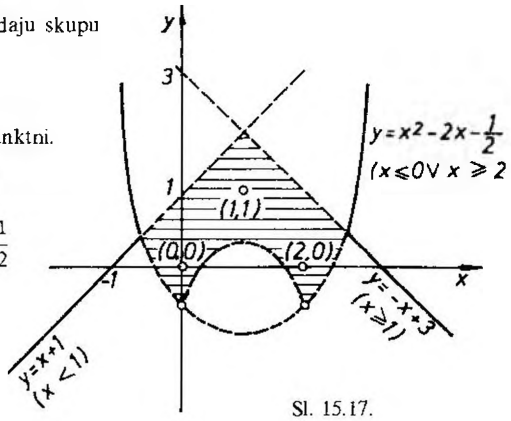
$x \in (0, 2)$, $\quad y > -x^2 + 2x - \dfrac{1}{2}$

$x \in [1, +\infty)$, $\quad y < -x + 3$

$x \in (-\infty, 1)$, $\quad y < x + 1$.

Tačke kojima odgovaraju parovi (x, y), $x, y \in R$, koji su rješenja sistema, prekrivaju iscrtkanu oblast na slici 15.17. Cjelobrojna rješenja sistema su:

$$(0, 0), (1, 1), (2, 0).$$



Sl. 15.17.

15.56. Ako dati sistem napišemo u obliku

$$x < y < x^3,$$

tada je, očito, $x < x^3$, tj.

$$x^3 - x = (x+1)\,x\,(x-1) > 0,$$

odakle slijedi da je

$$-1 < x < 0 \text{ ili } 1 < x < +\infty.$$

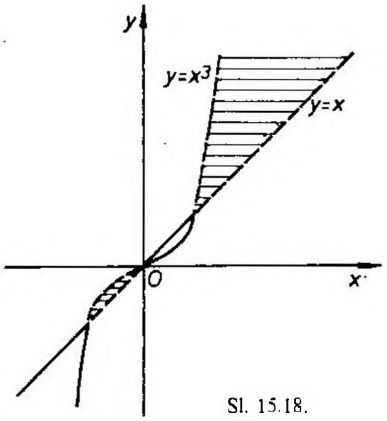
Prema tome, rješenja čine ove dvije oblasti:

$$x < y < x^3,$$
$$-1 < x < 0;$$

i

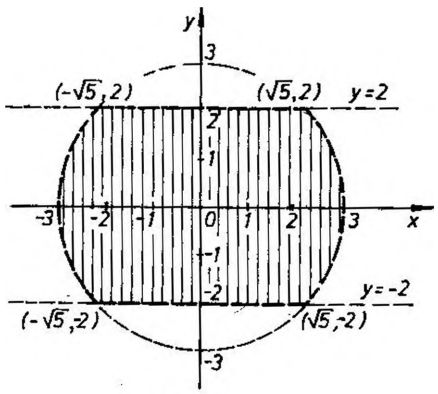
$$x < y < x^3,$$
$$1 < x < +\infty.$$

To su oblasti ispod kubne parabole $y = x^3$ i iznad prave $y = x$ (sl. 15.18).

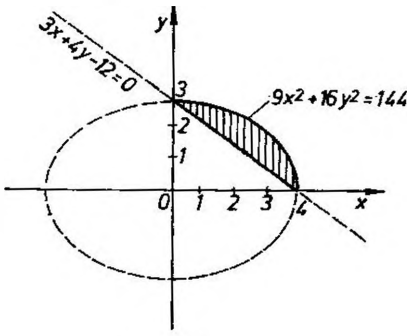


Sl. 15.18.

15.57. a) Unutarnja oblast tačaka kružnice $x^2 + y^2 = 9$ je rješenje nejednačine $x^2 + y^2 < 9$ (sl. 15.19).



Sl. 15.19.



Sl. 15.20.

$$-3 < x < -\sqrt{5}, \quad -\sqrt{9-x^2} < y < \sqrt{9-x^2};$$
$$-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}, \quad -2 < y < 2;$$
$$\sqrt{5} < x < 3, \quad -\sqrt{9-x^2} < y < \sqrt{9-x^2}.$$

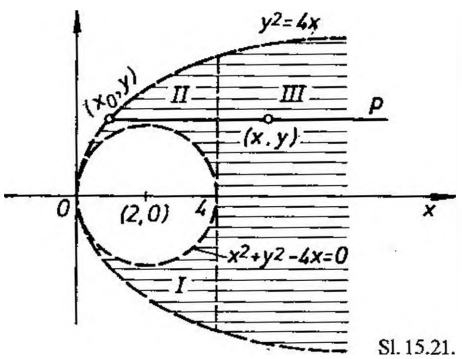
b) Jednačini $9x^2 + 16y^2 = 144$ odgovara elipsa velike poluose $a = 4$ i male poluose $b = 3$ (sl. 15.20). (Jednačina elipse čije su ose na koordinatnim osama je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.)

Unutarnja oblast tačaka elipse je rješenje nejednačine $9x^2 + 16y^2 < 144$. Rješenje sistema je (v. sl. 15.20):

$$0 \leqslant x \leqslant 4, \quad -\frac{3}{4}x + 3 \leqslant y \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{144 - 9x^2}.$$

c) *Grafičko rješenje.*

Kriva $y^2 = 4x$ je parabola, a kriva $x^2 + y^2 - 4x = 0$ je kružnica središta $S(2, 0)$ i radijusa $r = 2$ (sl. 15.21). Nejednačinu $x^2 + y^2 - 4x > 0$ zadovoljavaju tačke (x, y) izvan kružnice. Prava p koja prolazi tačkom (x, y) siječe parabolu u tački (x_0, y) za koju je $x_0 = \frac{y^2}{4}$. Da bi bilo $4x > y^2$, tj. $x > \frac{y^2}{4}$, mora biti $x > x_0$. Zato su rješenja (x, y) nejednačine $y^2 < 4x$ tačke „unutrašnje" oblasti parabole (v. sl. 15.21).



Sl. 15.21.

Znači, zajednička rješenja su parovi (x, y) svih zajedničkih tačaka vanjske oblasti kružnice i „unutarnje" oblasti parabole. Ta zajednička oblast je na slici iscrtkana.

Algebarsko rješenje. Dati sistem se može napisati u obliku

$$4x - x^2 < y^2 < 4x. \tag{1}$$

Pošto je $x > 0$, dakle

$$4x - x^2 = x(4 - x)\begin{cases} \geqslant 0, & \text{ako je } 0 < x \leqslant 4, \\ < 0, & \text{ako je } x > 4, \end{cases}$$

iz (1) imamo:

$$1^\circ \quad -\sqrt{4x} < y < -\sqrt{4x - x^2}, \quad 0 < x \leqslant 4,$$
$$\sqrt{4x - x^2} < y < \sqrt{4x}, \quad 0 < x \leqslant 4.$$

Ove formule opisuju oblasti I i II na slici 15.21.

2° Ako je $x > 4$, tada je u (1) $y^2 > 4x - x^2$ za sve $x > 4$, a iz druge nejednačine u (1) slijedi $|y| < \sqrt{4x}$, tj.

$$-\sqrt{4x} < y < \sqrt{4x},\ x > 4.$$

To je upravo oblast III na slici.

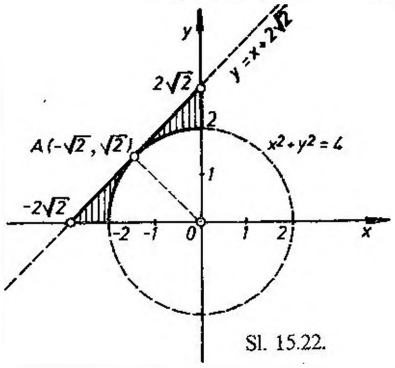
15.58. a) Za sve tačke vanjske oblasti kružnice

$$x^2 + y^2 = 4$$

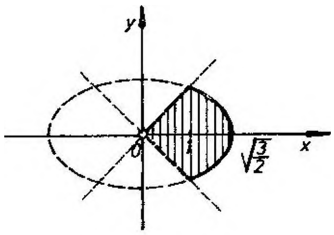
je $x^2 + y^2 > 4$ (sl. 15.22).

Rezultat: $-2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant -2,\quad 0 \leqslant y \leqslant x + 2\sqrt{2};$

$$-2 \leqslant x \leqslant 0,\quad \sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant x + 2\sqrt{2}.$$



Sl. 15.22.



Sl. 15.23.

b) *Rješenje*: $x \geqslant 0 \wedge x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0 \wedge |y| < |x| \Leftrightarrow x \geqslant 0 \wedge -|x| < y < |x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0 \wedge -x < y < x$:

$$2x^2 + y^2 \leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{3} \leqslant \text{ (elipsa), (sl. 15.23).}$$

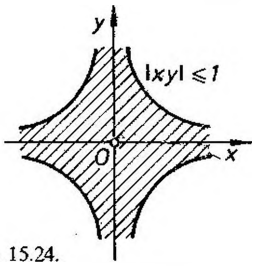
Dakle, skup rješenja datog sistema je

$$\mathscr{R} = \{(x, y): 0 < x < 1,\ -x < y < x\} \cup \left\{(x, y): 1 < x < \sqrt{\frac{3}{2}},\ |y| \leqslant \sqrt{3 - 2x^2}\right\}.$$

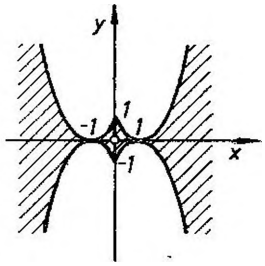
15.59. a) Nejednačina je ekvivalentna sa $-1 \leqslant xy \leqslant 1$ (sl. 15.24).

b) Data nejednačina je ekvivalentna sa

$$-(|x| - 1)^2 \leqslant y \leqslant (|x| - 1)^2 \quad \text{(sl. 15.25.)}.$$



Sl. 15.24.



Sl. 15.25.

15.60. *Rješenje*: Data nejednačina je ekvivalentna sa

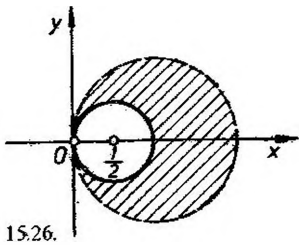
$$(x^2 + y^2 - x \geqslant 0 \wedge 2x - x^2 - y^2 > 0) \vee$$

$$\vee (x^2 + y^2 - x \leqslant 0 \wedge 2x - x^2 - y^2 < 0),$$

odnosno sa dva sistema nejednačina:

$$\text{I:}\quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{4},\quad (x - 1)^2 + y^2 < 1;$$

$$\text{II:}\quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4},\quad (x - 1)^2 + y^2 > 1.$$



Sl. 15.26.

Drugi sistem nema rješenja, pa su rješenja date nejednačine rješenja prvog sistema, tj.

$$\mathscr{R} = \left\{(x, y) : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{4}, \qquad (x-1)^2 + y^2 < 1\right\}, \text{ (sl. 15.26).}$$

15.61. a) *Rješenje*: Kako je

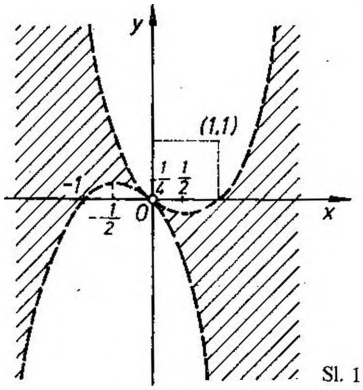
$$|x + y| < x^2 \Leftrightarrow (-x^2 < x + y < x^2,\ (x \neq 0)) \Leftrightarrow (-x^2 - x < y < x^2 - x),$$

(1) $$y_2 = x^2 - x = x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

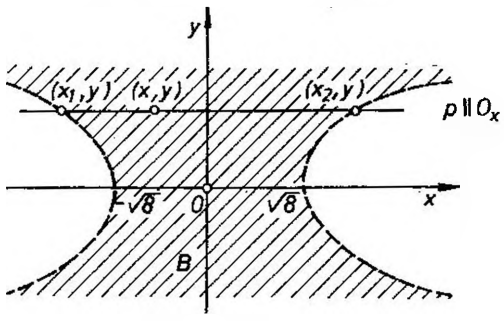
(2) $$y_1 = -x^2 - x = -x(x+1) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

$$y_1 = y_2 \Leftrightarrow x^2 - x = -x^2 - x \Leftrightarrow x = 0,$$

zaključujemo da skup A čine sve tačke spoljašnje oblasti parabola (1) i (2) (sl. 15.27).



Sl. 15.27.



Sl. 15.28.

Iz

(3) $$x^2 - 2y^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1 \text{ (hiperbola)}$$

i

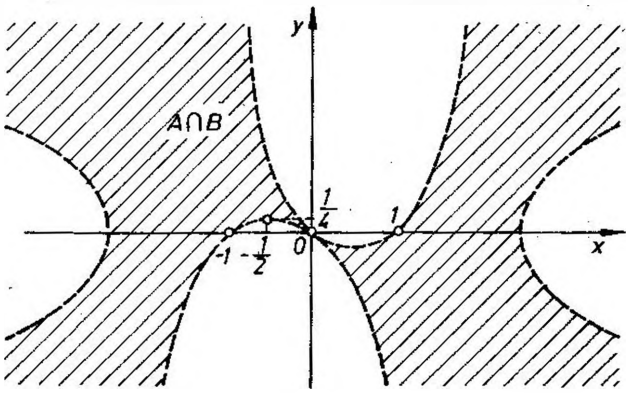
$$x^2 - 2y^2 < 8 \Leftrightarrow x^2 < 2y^2 + 8 = x_i^2\ (i = 1, 2) \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$$

izlazi da skup B čine sve tačke „spoljašnje" oblasti hiperbole (3) (sl. 15.28).

Analitički, presjek $C = A \cap B$ dat je sa

$$C = \{(x, y) : |x + y| < x^2 \wedge x^2 - 2y^2 < 8\},$$

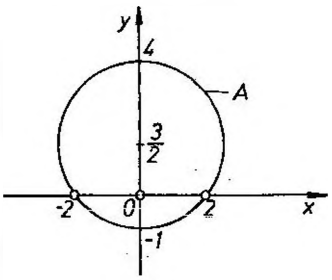
a, grafički, prikazan je na sl. 15.29. (šrafirana oblast, isključujući tačke na konturama).



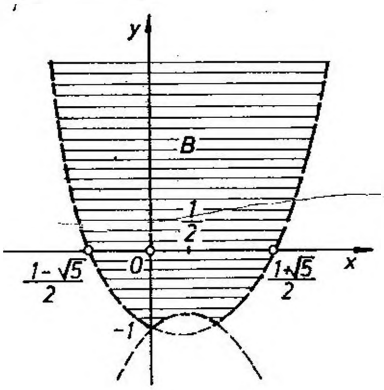
Sl. 15.29.

b) Kako je

$$A = \{(x, y) : x^2 - 3y + y^2 = 4\} = \left\{(x, y) : \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{25}{4}\right\} \text{ (sl. 15.30),}$$



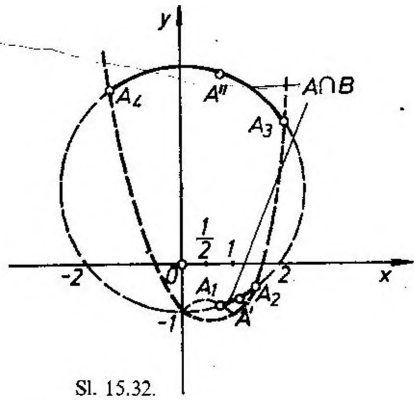
Sl. 15.30.



Sl. 15.31.

$$B = \{(x, y) : |x - x^2| < y + 1\} =$$
$$= \{(x, y) : (-x + x^2 < y + 1 \wedge x - x^2 < y + 1) \wedge (y > -1)\} =$$
$$= \{(x, y) : -y - 1 < x - x^2 < y + 1\} =$$
$$= \{(x, y) : y > x^2 - x - 1 \wedge y > -x^2 + x - 1\}$$

(sl. 15.31),



Sl. 15.32.

to zaključujemo da skup

$$A \cap B = \{(x, y) : x^2 - 3y + y^2 = 4 \wedge |x - x^2| < y + 1\}$$

čine sve tačke luka ova $A_1\ A'\ A_2$ i $A_3\ A''\ A_4$, isključujući tačke A_1, A_2, A_3 i A_4 (sl. 15.32).

15.62. *Rješenje*: a)

(1) $x^2 - 3x + y^2 = 4 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ (kružnica),

(2) $x - 3y + y^2 = 2 \Leftrightarrow x = -y^2 + 3y + 2 \Leftrightarrow x = -\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$ (parabola).

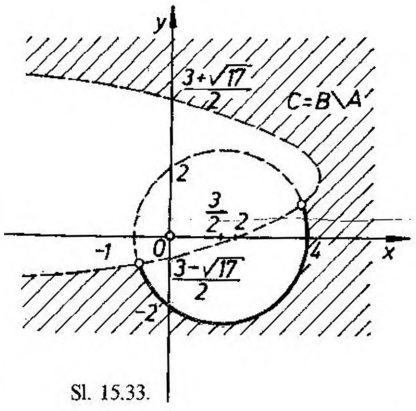
Kako

$$(x = 0 \wedge y = 0) \Rightarrow (x^2 - 3x + y^2 < 4 \wedge x - 3y + y^2 \not> 2)$$

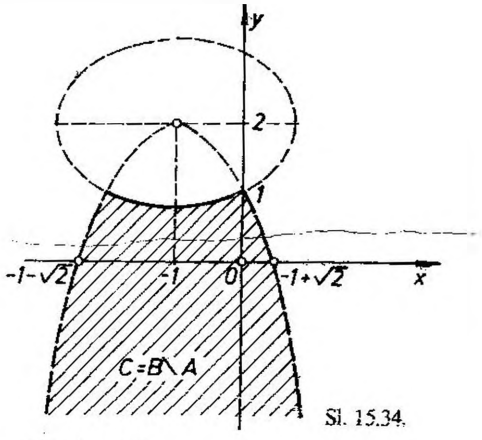
to zaključujemo da $(0, 0) \in A$ i $(0, 0) \notin B$, pa skup A čine sve tačke unutrašnje oblasti kružnice (1), a skup B sve tačke spoljašnje oblasti parabole (2).

Dakle, skup $C = B \setminus A$, geometrijski, je šrafirana oblast (isključujući tačke na paraboli) na slici 15.33.
Analitički, skup $C = B \setminus A$ dat je sa

$$C = \{(x, y) : x - 3y + y^2 > 2 \wedge x^2 - 3x + y^2 \geqslant 4\}.$$



Sl. 15.33.



Sl. 15.34.

b) A: $2x^2 + 4x + 3y^2 - 124 + 8 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{2} < 1$,

B: $x^2 + 2x < 1 - y \Leftrightarrow y < 1 - x^2 - 2x$.

Vidi se da je A unutrašnja oblast elipse $\dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{2} = 1$, a B unutrašnja oblast parabole $y = 1 - x^2 - 2x$, pa je $C = B \setminus A$ šrafirana oblast na sl. 15.34.

15.63. a) Dobije se jednačina $u = 0$ ose v.

Prema 14.4. c) potrebni i dovoljni uslovi za odnos $-1 < x_1 \leqslant x_2 < 1$ su:

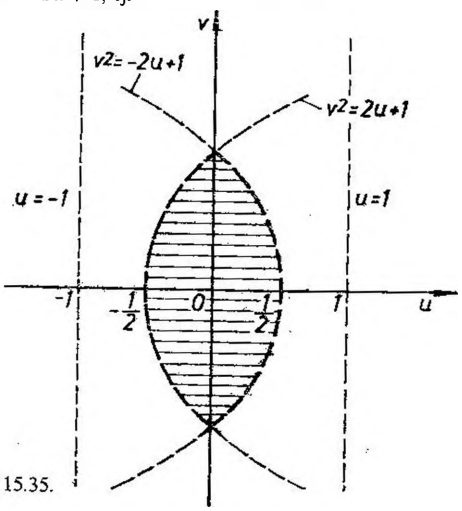
$$D \geqslant 0 \wedge f(-1) > 0 \wedge f(1) > 0 \wedge -1 < -\frac{b}{2a} < 1,$$

tj. (1) $v^2 < 2u + 1$,

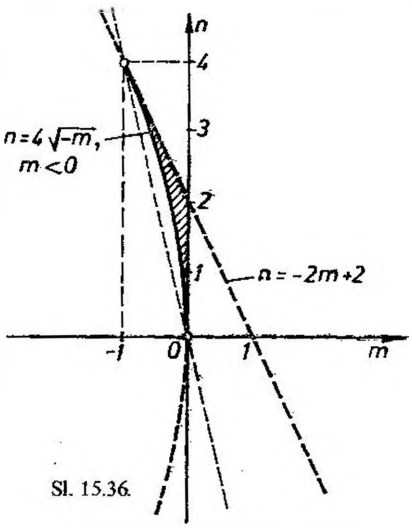
(2) $v^2 < -2u + 1$,

(3) $-1 < u < 1$.

Oblasti određene nejednačinama (1) i (2) su one kojima pripada ishodište $O(0, 0)$, jer se tada iz (1) i (2) dobije tačna nejednakost $0 < 1$. Na slici 15.35. je prikazana tražena oblast između parabola $v^2 = 2u + 1$ i $v^2 = -2u + 1$, tj.



Sl. 15.35.



Sl. 15.36.

$$-\frac{1}{2} < u \leqq 0, \; -\sqrt{2u+1} < v < \sqrt{2u+1},$$

$$0 \leqq u < \frac{1}{2}, \; -\sqrt{-2u+1} < v < \sqrt{-2u+1}.$$

15.64. Prema slici 14.7, za $m \neq 0$, vrijedi ekvivalencija

$$2 < x_1 \leqq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \geqq 0, \\ a \cdot f(2) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 2. \end{cases}$$

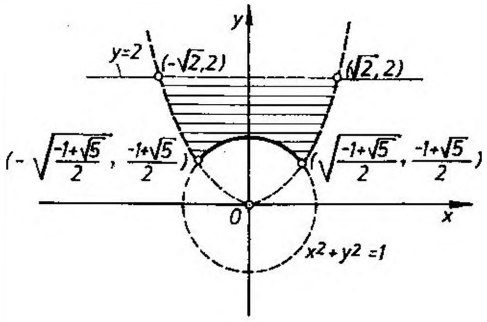
Prema slici 15.36, za $m \neq 0$, rješenja su svi parovi (m, n) za koje važi: $-1 < m < 0$, $4\sqrt{-m} \leqq n < -2m + 2$. (Uočiti da je, za $m \neq 0$, $x_1 \cdot x_2 = q > 0$, tj. $-\dfrac{4}{m} > 0$, odakle slijedi $m < 0$, pa odmah isključiti poluravan za koju je $m > 0$.)

Za $m = 0$ imamo linearni polinom $f(x) = nx - 4$, koji ima nulu $x_1 > 2$, ako i samo ako je $0 < n < 2$.

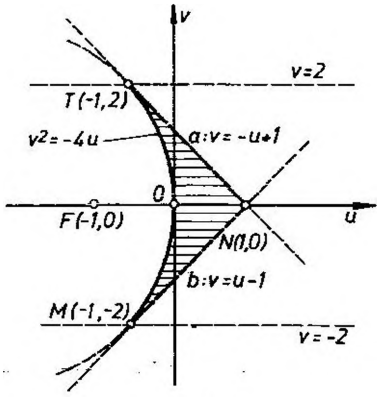
15.65. $-\sqrt{2} < x < -\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \quad x^2 < y < 2;$

$$-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < x < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \quad \sqrt{1-x^2} \leqq y < 2;$$

$$\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < x < \sqrt{2}, \quad x^2 < y < 2 \text{ (sl. 15.37).}$$



Sl. 15.37.



Sl. 15.38.

15.66. a) Skup tačaka $X(u, v)$ je parabola $v^2 = -4u$ (sl. 15.38).

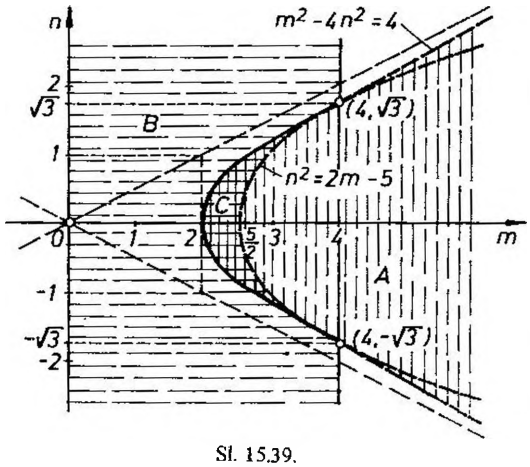
b) $(x_1 = 1 \vee x_2 = 1) \Leftrightarrow (f(1) = 0 \wedge D > 0)$. Skup tačaka $X(u, v)$ je prava $a: v = -u + 1$, izuzev tačke $T(-1, 2)$ dodira prave a i parabole.

c) Skup tačaka $X(u, v)$ je oblast ravni omeđena pravima $a: v = -u + 1$, $b: v = u - 1$ i parabolom $v^2 = -4u$, uključivši i tačke te parabole za koje je $u > -1$. To je skup:

$$\mathscr{M} = \{(u, v) \in R^2 \mid -1 < u < 0 \wedge (\sqrt{-4u} \leqq v < -u + 1) \vee$$
$$\vee\, u - 1 < v \leqq -\sqrt{-4u})\} \cup \{(u, v) \in R^2 \mid 0 \leqq u < 1 \wedge u - 1 < v < -u + 1\}.$$

15.67. a) Rješenja su realna za sve parove (m, n) kojima odgovara unutarnja oblast hiperbole $m^2 - 4n^2 = 4$, poluosa $a = 2$, $b = 1$, uključiv i tu hiperbolu (sl. 15.39).

b) Uslov $f(-1) > 0$ ispunjen je za sve $m, n \in R$, uslov $f(1) > 0$ u oblasti B lijevo od parabole $n^2 = 2m - 5$ tjemena $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, a uslov $-1 < -\frac{b}{2a} < 1$ za $m \in (0, 4)$.



Sl. 15.39.

Rješenja su parovi (m, n) koji odgovaraju svim tačkama oblasti C za koje vrijedi:

$$2 \leqslant m < \frac{5}{2}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4} \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4};$$

$$\frac{5}{2} \leqslant m < 4, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4} \leqslant n < -\sqrt{2m - 5},$$

ili $\quad \sqrt{2m - 5} < n \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4}.$

16. IRACIONALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. SISTEMI IRACIONALNIH JEDNAČINA

16.1. IRACIONALNE JEDNAČINE

16.1. Jednačina je definisana za $x \geqslant \frac{4}{5}$. Kvadriranjem i sređivanjem iz date jednačine dobijemo jednačinu

$$\sqrt{25x^2 - 16} = -3,$$

koja, očito, nema rješenja, jer je, za $x \geqslant \frac{4}{5}$, $\sqrt{25x^2 - 16} \geqslant 0$, a $-3 < 0$.

16.2. Jednačina je definisana za

(1) $$x \leqslant 1.$$

Tada je $x - 1 \leqslant 0$, pa je data jednačina ekvivalentna jednačini

(2) $$\sqrt{1 - x} = 1 - x.$$

Kako je, zbog uslova (1), $1 - x \geqslant 0$, jednačinu (2) možemo kvadrirati itd., pa dobijemo sljedeća rješenja:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,$$

u što se uvjeravamo uvrštavanjem ovih vrijednosti u datu jednačinu.

16.3. Ovdje je najjednostavnije ne postavljati uslove za nepoznatu x, već se osloboditi korijena (prebaciti na desnu stranu ($1 - x$), kvadrirati itd.), pa se dobije

$$x = 7.$$

Probom se uvjeravamo da je ovo rješenje (i to jedino) date jednačine.

16.4. *Uputa*: Uvesti smjenu $x^2 + 4x + 4 = y$, $y \geqslant 0$, nakon čega se data jednačina svodi na jednačinu

$$\sqrt{y + 4} + \sqrt{y} = \sqrt{2(y + 2)}.$$

Rješenje je $x = -2$.

16.5. *Uputa*: Uočiti da je $2x^2 + 21x - 11 = (2x - 1)(x + 11)$, $2x^2 - 9x + 4 = (2x - 1)(x + 4)$, $18x - 9 = 9 \cdot (2x - 1)$. Pošto mora biti $2x - 1 \geqslant 0$, to je i $x + 11 \geqslant 0$ i $x + 4 \geqslant 0$, pa je data jednačina ekvivalentna jednačini

$$\sqrt{2x - 1}\,(\sqrt{x + 11} - \sqrt{x + 4} - 3) = 0.$$

Rješenje je $x = \frac{1}{2}$.

16.6. Uvede li se smjena $\sqrt{2x - 5} = y \geqslant 0$, biće $x = \frac{y^2 + 5}{2}$, pa se, nakon uvrštavanja i sređivanja, dobije jednačina

$$\sqrt{(y + 1)^2} + \sqrt{(y + 3)^2} = 14.$$

Rješenje je $x = 15$.

16.7. Definiciono područje je

(1) $$x \geqslant \frac{1}{4}.$$

Množenjem date jednačine sa $\sqrt{2x+\sqrt{x}}$, dobije se jednačina

$$4x-\sqrt{x}=2\sqrt{4x^2-x}. \tag{2}$$

Da bi rješenje postojalo mora u jednačini (2) biti $4x-\sqrt{x}\geqslant 0$, tj.

$$x\geqslant\frac{1}{16},$$

a to je zadovoljeno uz uslov (1). Iz jednačine (2) se dobije

$$x=\frac{25}{64}.$$

Ova vrijednost zadovoljava datu jednačinu, pa je to njeno rješenje.

16.8. Pošto je $10+x+6\sqrt{x+1}=(x+1)+6\sqrt{x+1}+9=(\sqrt{x+1}+3)^2$, $5-x+2\sqrt{4-x}=$
$=(4-x)+2\sqrt{4-x}+1=(\sqrt{4-x}+1)^2$,
uz uslov $4-x\geqslant 0$, tj. $x\leqslant 4$, iz date jednačine slijedi jednačina

$$\sqrt{x+1}+3+\sqrt{4-x}+1=7,$$

itd., pa se, na kraju, dobiju rješenja

$$x_1=0,\quad x_2=3.$$

16.9. Definiciono područje jednačine je

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant x\leqslant 1. \tag{1}$$

Uz uslov (1) je $1-\sqrt{x}\geqslant 0$, pa se data jednačina može kvadrirati, te se dobije jednačina

$$\sqrt{1-x}=2\sqrt{x}-1.$$

Ovdje mora biti $2\sqrt{x}-1\geqslant 0$, tj. $x\geqslant\frac{1}{4}$ (jer je lijeva strana nenegativna). Ovaj uslov je ispunjen ako je ispunjen uslov (1) $\left(\text{jer se pokazuje da je } \frac{1}{4}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. Kvadriranjem posljednje jednačine i sređivanjem dobije se jednačina

$$x(25x-16)=0.$$

Njeno rješenje $x=0$ ne zadovoljava uslov (1), a $x=\frac{16}{25}$ ga zadovoljava, i to je rješenje date jednačine.

16.10. Definiciono područje jednačine je

$$|x|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Pošto je $4x^4+1>0$, mora i desna strana jednačine biti pozitivna, tj. mora biti $x>0$ i $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$. Odatle slijedi uslov

$$x<\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Data jednačina je, uz uslov (2), ekvivaletna jednačinama

$$16x^8-32x^6+8x^4+8x^2+1=0,$$
$$16\left(x^4+\frac{1}{16x^4}\right)-32\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)+8=0.$$

Stavi li se da je $x^2-\frac{1}{4x^2}=y$, odakle slijedi $x^4+\frac{1}{16x^4}=y^2+\frac{1}{2}$, iz posljednje jednačine slijedi jednačina

$$16(y-1)^2=0,$$

odakle se dobije $y=1$. Za nepoznatu x se dobije da je

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}.$$

Pokazuje se da ova vrijednost zadovoljava uslov (2), a i datu jednačinu, pa je njeno rješenje.

16.11. Uočiti da je, za sve $x \in R$, $\sqrt{|x|+1} > \sqrt{|x|}$, pa za parametar a slijedi da je

$$a > 0.$$

Kada $\sqrt{x}$ prebacimo na desnu stranu date jednačine, kvadriramo i sredimo, dobijemo da je

$$\sqrt{|x|} = \frac{1-a^2}{2a}.$$

Odavde zaključujemo da je $1 - a^2 \geqslant 0$, pa, zbog uslova da je $a > 0$, imamo sljedeći uslov za parametar a:

$$0 < a \leqslant 1$$

Uz ovaj uslov za parametar a rješenja su

$$x_{1,2} = \pm \frac{(1-a^2)^2}{4a^2}.$$

16.12. Domena date jednačine određena je uslovom

(1) $$x^2 + k \geqslant 0.$$

Data jednačina ekvivalentna je skupu jednačina

$$k + x = 0 \vee k - x = \sqrt{x^2 + k}.$$

a) Iz prve jednačine slijedi da je $x = -k$, a zbog uslova (1) mora biti $(-k)^2 + k \geqslant 0$, tj. $k \leqslant -1 \vee k \geqslant 0$.

Dakle, ako je $k \leqslant -1 \vee k \geqslant 0$, tada je $x = -k$.

b) Da bi druga jednačina imala rješenje, treba da je $k - x \geqslant 0$, tj.

(2) $$x \leqslant k.$$

Druga jednačina je, uz uslov (2), ekvivalentna jednačini

(3) $$2kx = k(k-1).$$

1° Ako je $k \neq 0$, iz jednačine (3) je $x = \frac{k-1}{2}$, ali zbog uslova (1) i (2) mora biti $\left(\frac{k-1}{2}\right)^2 + k \geqslant 0$ i $\frac{k-1}{2} \leqslant k$, što je ispunjeno za $k \geqslant -1$.

Dakle, za $k \neq 0$ i $k \geqslant -1$ je $x = \frac{k-1}{2}$.

2° Za $k = 0$, u jednačini (3) je x proizvoljno. Proizvoljno x zadovoljava uslov (1), a prema uslovu (2) mora biti $x \leqslant 0$.

Rezultat:

za $k \leqslant -1$ je $x = -k$,
za $k = 0$ je $x \leqslant 0$,
za $-1 \leqslant k < 0$ je $x = \frac{k-1}{2}$,
za $k > 0$ je $x = -k \vee x = \frac{k-1}{2}$.

16.13. Jednačina je definisana uz uslov

(1) $$x^2 \geqslant p \wedge x^2 \geqslant 1.$$

Rješenja mogu postojati samo u oblasti u kojoj je

(2) $$x \geqslant 0.$$

Uz uslove (1) i (2) data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)} = 4 + p - 4x^2.$$

Sada treba zaključiti da je

(3) $$x^2 \leqslant \frac{4+p}{4},$$

i da iz uslova (1) i (3) za parametar p slijede uslovi

$$0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}.$$

Rezultat:

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}, \quad \text{ako je } 0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}.$$

Za ostale vrijednosti parametra p jednačina nema rješenja.

16.14.* Definiciono područje je skup $[a^2, +\infty)$ za $a < 0$, a skup $[0, +\infty)$ za $a \geqslant 0$. Data jednačina je ekvivaletna jednačini

$$x - a = \sqrt{a} + \sqrt{x}.$$

Ovdje mora biti $x \geqslant a$. U tome slučaju treba primijeniti sljedeće transformacije:

$$x - a = \sqrt{a} + \sqrt{x} \Leftrightarrow (x-a)^2 = a + \sqrt{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2 - (\sqrt{x})^2 + x - a - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - a - \sqrt{x})(x - a + \sqrt{x}) + (x - a - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - a - \sqrt{x})(x - a + \sqrt{x} + 1) = 0.$$

Rješenje je $x = \dfrac{1 + 2a + \sqrt{1 + 4a}}{2}$, za $a \geqslant 0$.

16.15. Zaključiti da mora biti $a > 0$ i $x > 0$. Rješenje jednačine je

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - 1} \text{ za } a > 1,$$

a za ostale vrijednosti parametra a jednačina nema rješenja.

16.16. Definiciono područje je

(1) $x \geqslant -a^2$ za $a < 0$,

(2) $x \geqslant -a^2$ i $x \neq 0$ za $a \geqslant 0$.

Uslov za parametar b:

(3) $b \neq 0$.

Uz prethodne uslove data jednačina ekvivalentna je jednačini

(4) $\sqrt{a^2 + x}(a + b) = a^2 - b^2$.

a) Ako je $a = -b$, tada iz jednačine (4) ili iz date jednačine zaključujemo da je rješenje svaka vrijednost x iz definicionog područja jednačine.

b) Za $a \neq -b$ jednačina (4) je ekvivalentna jednačini

(5) $\sqrt{a^2 + x} = a - b$.

1° Ako je $a \geqslant b$, iz jednačine (5) je $x = b^2 - 2ab$ i ta vrijednost zadovoljava definiciono područje. Za $a \geqslant 0$ mora, prema uslovu (2), biti $b^2 - 2ab \neq 0$, tj. $a \neq \dfrac{b}{2}$, ali je taj uslov sadržan u uslovu $a \geqslant b$.

Dakle, za $a \geqslant b$, $a \geqslant 0$ je $x = b^2 - 2ab$.

2° Za $a < b$ jednačina (5) nema rješenja.

Rezultat:

Ako je $b \neq 0$, $a \neq -b$, $a \geqslant b$, tada je $x = b^2 - 2ab$;
ako je $b \neq 0$, $a < b$ jednačina nema rješenja;
ako je $a = -b$, $a < 0$, $b \neq 0$, tada je $x \geqslant -a^2$;
ako je $a = -b$, $a \geqslant 0$, $b \neq 0$, tada je $x \geqslant -a^2$, $x \neq 0$.

16.17. Domena jednačine određena je uslovima $-a \leqslant x \leqslant a$, $x \neq 0$, a za parametar b vrijedi uslov da je $b \geqslant 0$. Iz uslova $\sqrt{a + x} > \sqrt{a - x}$ slijedi da je $x > 0$, pa za skup $\mathscr{R}$ rješenja važi:

$$\mathscr{R} \subset (0, a].$$

Uz uslov $0 < x \leqslant a$ data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{b}\,x - a,$$

koja za $b = 0$ nema rješenja, a za $b > 0$ iz nje slijede uslovi

$$x \geqslant \frac{a}{\sqrt{b}} \quad \text{i} \quad x = \frac{2a\sqrt{b}}{1 + b}.$$

Ova vrijednost za x pripada intervalu $(0, a]$ samo za $b \geqslant 1$.

Rezultat:

Za $a > 0$ i $b \geqslant 1$ je $x = \dfrac{2a\sqrt{b}}{b + 1}$;

za $a > 0$ i $b < 1$ jednačina nema rješenja.

16.18. Radeći kao i u primjeru 16.1, dobijemo jednačinu

$3\sqrt[3]{x(2x-3)}\cdot\sqrt[3]{12(x-1)} = 9(x-1)$. Odavde slijedi jednačina

$$4x(2x-3)(x-1) = 9(x-1)^3,$$

koja je ekvivalentna skupu jednačina

$$x-1=0 \vee x^2-6x+9=0.$$

Rješenja su

$$x_1 = 1,\ x_{2,3} = 3.$$

16.19. Data se jednačina svodi na ove ekvivalentne jednačine:

$$\sqrt[3]{(2x-37)^2} + 6\sqrt[3]{2x-37} + 9 = 0,$$

$$(\sqrt[3]{2x-37}+3)^2 = 0,$$

pa se dobije da je rješenje $x = 5$.

16.20. Pošto je $4x^2+10x+4 = 2(x+2)(2x+1)$ i $2x^2-5x-3 = (x-3)(2x+1)$, data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\sqrt[3]{2x+1}\,(\sqrt[3]{2(x+2)} + \sqrt[3]{x-3} - 1) = 0.$$

Rješenja su $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

16.21. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3} = 12.$$

Ako se uvede nova nepoznata y, dobije se jednačina

$$y^3 + y^2 - 12 = 0.$$

Jedno njeno rješenje $y_1 = 2$ može se naći pogađanjem, a može i na osnovu teoreme 19.6. Kada se jednačina $y^3+y^2-12=0$ podijeli sa $y-2$ (vidjeti teoremu 19.5), dobije se jednačina

$$y^2 + 3y + 6 = 0,$$

ali ona nema realna rješenja.

Rezultat je $x = 64$.

16.22. Domena jednačine je $D = [1, +\infty)$. Ako se uvede smjena

$$\sqrt[3]{2-x} = a,\ \sqrt{x-1} = b \geqslant 0,$$

iz date jednačine se dobije da je

$$a = 1 - b,$$

a iz uslova smjene da je

$$a^3 + b^2 = 1.$$

Za $a = 1-b$ posljednja jednačina poprima oblik

$$b(b^2 - 4b + 3) = 0$$

itd.

Rješenja jednačine su:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 10.$$

16.23.* *Uputa*: ustanoviti da je za svako realno x lijeva strana jednačine negativna, a desna nenegativna i da zato jednačina nema rješenja.

16.24. Definiciono područje određuje uslov $|x| \leqslant |a|$. Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left\{-a\sqrt{\frac{2}{3}}, a\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.$$

16.25. *Uputa*: uvesti smjenu $\sqrt[4]{x-1} = y$, $y \geqslant 0$. Dobije se jednačina

$$y^2 + 6y - 16 = 0.$$

Rješenje je $x = 17$.

16.26. *Uputa*: uvesti smjenu $\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}} = y$ $(y > 0)$, pa datu jednačinu svesti na oblik

$$\sqrt[4]{\frac{1-a}{1+a}}\cdot y = 1.$$

Za $a = 1$ data jednačina nema rješenja,

za $|a| < 1$ rješenje je $x = -a$,

a za ostale vrijednosti parametra a jednačina se ne posmatra.

16.27. Domena jednačine data je uslovima $x \leqslant a$ i $x \leqslant b$, tj. $x \leqslant \min\{a, b\}$.
Ako se uvede smjena

$$\sqrt[4]{a-x} = y \geqslant 0, \quad \sqrt[4]{b-x} = z \geqslant 0,$$

dobije se sistem jednačina

$$y + z = \sqrt[4]{a+b-2x}, \; y^4 + z^4 = a + b - 2x,$$

odakle slijedi:

$$(y+z)^4 = y^4 + z^4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow yz = 0 \vee 2y^2 + 3yz + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee z = 0 \vee 2\left(\frac{y}{z}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{z}\right) + 2 = 0,$$

ali posljednja jednačina nema realnih rješenja po nepoznatoj $\frac{y}{z}$. Iz jednakosti $y = 0$ ili $z = 0$, dobije se da je $x = a$ ili $x = b$.

Rješenje jednačine je

$$x = \min\{a, b\}.$$

16.28. *Uputa*: *Prvi način*. Uvesti nove nepoznate u i v i datu jednačinu svesti na jednačinu

$$(u - v)^2 (u + v)(u^2 + v^2) = 0.$$

Drugi način. Svesti obje strane jednačine na zajednički nazivnik. Dobije se jednačina

$$(a + b - 2x)(\sqrt[4]{x-b} - \sqrt[4]{a-x}) = 0.$$

Rješenje je

$$x = \frac{a+b}{2} \quad \text{za } a > b.$$

16.29.* Ako se uvedu nove nepoznate

$\sqrt[5]{x^2 - 34x + 64} = u$, $\sqrt[5]{x^2 - 34x + 33} = v$, dobije se sistem

$$u - v = 1 \wedge u^5 - v^5 = 31.$$

Stavi li se sada da je $u + v = p$, odatle i iz jednačine $u - v = 1$, slijedi da je $u = \frac{p+1}{2}$, $v = \frac{p-1}{2}$.
Sada druga jednačina sistema prima oblik

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^5 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^5 = 31,$$

tj.

$$p^4 + 2p^2 - 99 = 0,$$

odakle je $p_1 = -3$, $p_2 = 3$. Dalje se dobije da je $u_1 = -1$, $u_2 = 2$, pa još treba riješiti jednačine

$$x^2 - 34x + 65 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 - 34x + 32 = 0.$$

Rezultat:

$$x_{1,2} = 17 \pm \sqrt{257}, \quad x_{3,4} = 17 \pm \sqrt{224}.$$

16.30. *Uputa*: Ako se uvede smjena

$$\sqrt[5]{a+x} = y, \quad \sqrt[5]{a-x} = z, \quad \sqrt[5]{2a} = b,$$

dobije se sistem

$$y + z = b \wedge y^5 + z^5 = b^5.$$

Rješenja date jednačine su

$$x_{1,2} = \pm a.$$

16.2. SISTEMI JEDNAČINA OD KOJIH JE BAR JEDNA IRACIONALNA

16.31. Dati se sistem može svesti na ovaj ekvivalentan sistem:

$$x + y = 72 \wedge xy = 512.$$

Skup rješenja sistema je

$$\mathscr{R} = \{(8, 64), (64, 8)\}.$$

16.32. Dati sistem ekvivalentan je sistemu:

$$2y - 1 = |x - 1| \wedge y^2 = 1 - |x|.$$

1° Ako je $x \geq 1$, dobijemo sistem

$$2y - 1 = x - 1 \wedge y^2 = 1 - x,$$

tj.

$$y = \frac{x}{2} \wedge y^2 = 1 - x.$$

Kako je $x \geq 1$, to je $y \geq \frac{1}{2}$ i $y^2 \leq 0$, što je nemoguće. Zato sistem, u oblasti $x \geq 1$, nema rješenja.

2° U oblasti $0 \leq x < 1$ imamo rješenje $x = 0$, $y = 1$.

3° Ako je $x < 0$, slijedi da je $y > 1$ i $-1 < y < 1$, što je nemoguće, pa sistem, za $x < 0$, nema rješenja.

Rješenje sistema je dvojka

$$x = 0,\ y = 1.$$

16.33. Sistem je definisan ako je $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Uz te uslove je

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y},$$

pa iz prve jednačine sistema imamo:

$$\sqrt{x}(\sqrt{y} - 1) + (\sqrt{y} - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)(\sqrt{x} + 1) = 0.$$

Odatle se dobije da je $y = 1$, a onda iz druge jednačine sistema slijedi da je $x = 1$.

$$\mathscr{R} = \{(1, 1)\}.$$

16.34. Zaključiti da mora biti $x > 0$ i $y > 0$, pa kvadrirati prvu jednačinu sistema. Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \{(8, 2), (2, 8)\}.$$

16.35. *Uputa*: U prvu jednačinu sistema uvesti nepoznatu t, pa se dobije da je $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Rješenja sistema su parovi

$$(-5, -3), (3, 1), \left(-\sqrt{10} - 1, \frac{-4\sqrt{10} - 5}{5}\right), \left(\sqrt{10} - 1, \frac{4\sqrt{10} - 5}{5}\right).$$

16.36. U definicionom području $(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$ dati sistem je ekvivalentan sistemu

(1) $$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \sqrt{xy} + 7 \wedge \sqrt{xy}(\sqrt{xy} + 7) = 78.$$

Staviti sada da je $\sqrt{xy} = z$, pa se iz druge jednačine sistema (1) dobije da je $z = 6$, tj. $xy = 36$. Tada, za $x > 0$ i $y > 0$ iz sistema (1) dobijemo sistem

$$x + y = 13 \wedge xy = 36,$$

a za $x < 0$ i $y < 0$ dobijemo sistem

$$-x - y = 13 \wedge xy = 36.$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \{(4, 9), (9, 4), (-4, -9), (-9, -4)\}.$$

16.37.* Sistem je definisan ako je $x \geq |y|$. Ako se uvede smjena

$$\sqrt{\frac{x + y}{2}} = u\ (u \geq 0), \quad \sqrt{\frac{x - y}{2}} = v\ (v \geq 0),$$

dobije se da je $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$. Tada se iz prve jednačine datog sistema dobije:

$$\frac{2(u^2 - v^2)(u^2 + v^2) + 2uv(u^2 - v^2)}{14} = u + v \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

(1) $$\Leftrightarrow (u + v)(u^3 - v^3 - 7) = 0.$$

Prema drugoj jednačini datog sistema je $u^3 + v^3 = 9$, dakle, u jednačini (1) nije $u + v = 0$, pa je $u^3 - v^3 = 7$. Tako se dobije sistem

$$u^3 - v^3 = 7 \wedge u^3 + v^3 = 9.$$

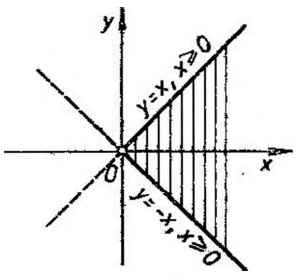
čije je rješenje $u = 2$, $v = 1$.

Rješenje datog sistema je dvojka $x = 5$, $y = 2$.

16.38. a) Iz uslova $x + y \geq 0$, $x - y \geq 0$ i $\sqrt{x + y} < \neq \sqrt{x - y}$ dobije se da je $x \geq 0$, $y \neq 0$ i $-x \leq y \leq x$, pa je definiciono područje

(1) $$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 < |y| \leq x\}.$$

Skup D predstavljen je grafički na slici 16.1. Njemu odgovara iscrtkana oblast ravni (bez tačaka na osi x).



Sl. 16.1.

b) Ako date izraze za dvojku (x, y) uvrstimo u prvu jednačinu sistema, nakon racionalisanja nazivnika dobijemo tačnu jednakost $\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Znači, ta je dvojka rješenje prve jednačine sistema.

Napomenimo da smo mogli raditi i ovako: kvadriramo li date izraze za x i y dobijemo da je $x^2 = 16$, $y^2 = 12$, odakle, prema (1) slijedi da je $x = 4$, $y = \pm 2\sqrt{3}$. Uvrštavanjem se uvjerimo da je par $(4, 2\sqrt{3})$ rješenje, a par $(4, -2\sqrt{3})$ nije.

c) Rješenje sistema je

$$x = 4 + 2\sqrt{3},\ y = 3 + 2\sqrt{3}.$$

16.3. IRACIONALNE NEJEDNAČINE

16.39. Pošto je definiciono područje nejednačine

$$D = [6, +\infty) \cap (-\infty, 1] \cap \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \emptyset,$$

nejednačina nije definisana ni za jednu realnu vrijednost x. Prema tome, nejednačina nema rješenja.

16.40. Definiciono područje date nejednačine je

$$D = \left[\frac{4}{5}, +\infty\right).$$

Kvadriranjem nejednačine i sređivanjem dobije se nejednačina

$$\sqrt{25x^2 - 16} \geqslant -3,$$

čija su rješenja sve vrijednosti $x \geqslant \frac{4}{5}$ iz definicionog područja (jer je tada $\sqrt{25x^2 - 16} \geqslant 0$, a $-3 < 0$).

16.41. Vidjeti primjer 16.7. Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = (-\infty, -7] \cup (5, +\infty).$$

16.42. Nejednačina je definisana u skupu

$$D = [0, 5]$$

i ona je u tome skupu ekvivalentna nejednačini

$$2\sqrt{25 - x^2} \cdot \sqrt{x^2 + 7x} > -(7x + 16).$$

Rješenja ove nejednačine su sve vrijednosti $x \in [0, 5]$, jer je tada lijeva strana posljednje nejednačine nenegativna, a desna strana negativna.

16.43. Definiciono područje $D = [-1, +\infty)$ najlakše je odrediti ako se uoči da se radikandi mogu napisati u obliku $(\sqrt{x+1} \pm 1)^2$. U skupu D data nejednačina je ekvivalentna nejednačini

$$x + |x| > 0,$$

čiji je skup rješenja

$$\mathscr{R} = \{x \in R : x > 0\}.$$

16.44. Nejednačina je definisana u skupu

(1) $$D = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

1° Ispitajmo kada je lijeva strana nenegativna.

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}} - \sqrt{\frac{x-2}{x}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x-2)} \geqslant 0.$$

	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x-1}{x(x-2)}$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	

Iz tabele vidimo da je lijeva strana nenegativna ako je

(2) $$(0 < x \leqslant 1) \vee 2 < x < +\infty.$$

Iz uslova (1) i (2) slijedi uslov

(3) $$x > 2.$$

Uz uslov (3) je $\frac{1}{x} > 0$, pa se data nejednačina može kvadrirati itd., pa se dobiju uslovi

(4) $$x < -\frac{2}{3} \vee x > 2.$$

Iz uslova (3) i (4) slijedi da je $x > 2$, pa je jedan podskup skupa $\mathscr{R}$ rješenja

$$\mathscr{R}_1 = (2, +\infty).$$

2° Iz tabele se vidi da je lijeva strana negativna ako je

$$x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2).$$

Odavde i iz uslova (1) slijedi da je

(5) $$x \in (-\infty, 0),$$

a tada je i $\frac{1}{x} < 0$. Zato se pri kvadriranju date nejednačine ne mijenja znak $>$, pa se dobije interval

(6) $$-\frac{2}{3} < x < 2$$

za koji ne moramo rješavati tu kvadriranu nejednačinu,
jer je taj interval komplement skupa određenog uslovima (4), u odnosu na skup R realnih brojeva. Iz ulsova (5) i (6) dobijemo još jedan podskup skupa rješenja

$$\mathscr{R}_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right).$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (2, +\infty).$$

16.45. *Uputa*: $D = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$. Radikandi se mogu, redom, napisati u obliku

$$(x-3)(x-5),\ (x-3)(x+5),\ 2(x-3)(2x-3),$$

pa za prvi korijen imamo:

za $x \geqslant 5$ je $\sqrt{x^2 - 8x + 15} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-5}$,

a za $x \leqslant -5$ je $\sqrt{x^2 - 8x + 15} = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{5-x}$.

Slično vrijedi i za ostala dva korijena.

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left(\frac{17}{3}, +\infty\right).$$

16.46. U skupu $D = (-2, +\infty)$ data je nejednačina ekvivalentna nejednačini

$$x < 2\sqrt{x^2 + 6x + 8},$$

a dalje vidjeti primjer 16.7.

$$\mathscr{R} = (-2, +\infty).$$

16.47. $D = [-1, 0) \cup (1, +\infty)$. U domeni D je $\frac{x-1}{x} \geqslant 0$, pa rješenja postoje ako je $\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$, što je ispunjeno ako je $x > 1$. Uz taj je uslov data nejednačina ekvivalentna nejednačini

$$x^2 + 2x + 1 > 2x\sqrt{x+1},$$

odnosno nejednačini

$$(x^2 - x - 1)^2 > 0.$$

Rezultat:

$$x > 1, \quad x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

16.48. Njednačina je definisana u skupu $D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Uvede li se nova nepoznata $\frac{x-1}{x} = y^2, y > 0$, dobije se da je $y < \frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $y^2 < \frac{3}{4}$, itd. Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = (1, 4)$$

16.49. $D = (-1, 1] \setminus \{0\}$. Nejednačina se može svesti na oblik

$$\frac{2\sqrt{1-x}}{x} < \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{1+x}}.$$

Riješiti posljednju nejednačinu posebno za $x < 0$, a posebno za $x > 0$ i pokazati da je skup rješenja

$$\mathscr{R} = (-1, 0) \cup \left(\frac{\sqrt{13}}{13}, 1\right].$$

16.50. Data nejednačina je definisana ako je

(1) $$x < -1 \vee x \geqslant 1.$$

Ona ima rješenja (ukoliko postoje) samo u oblasti u kojoj je $\sqrt{x^2+x} > \sqrt{x^2-x}$, tj. ako je

$$x > 0.$$

Nejednačina se svodi na nejednačinu

(3) $$x - \frac{1}{2} > \sqrt{x^2-1},$$

koja može imati rješenja samo ako je

(4) $$x > \frac{1}{2}.$$

Iz nejednačine (3) slijedi da je

(5) $$x < \frac{5}{4}.$$

Iz uslova (1), (2), (4) i (5) dobije se ovaj skup rješenja

$$\mathscr{R} = \left[1, \frac{5}{4}\right).$$

16.51. Definiciono područje je određeno uslovima

(1) $0 \leqslant x \leqslant a$, za $a \geqslant 0$:

(2) $a \leqslant x \leqslant 0$, za $a < 0$.

a) Ako je $a < 0$, nejednačina je zadovoljena za sve vrijednosti x u (2).

b) Za $a = 0$ nejednačina nema rješenja.

c) Za $a > 0$, data nejednačina je, uz uslov (1), ekvivalentna nejednačini

(3) $$\sqrt{(a^2-x^2)(2ax-x^2)} > x(x-a).$$

1° Slučaj $x(x-a) > 0$, tj. $x < 0 \vee x > a$ nije moguć, jer je protivan uslovu (1).

2° Slučaj $x(x-a) = 0$, tj. $x = 0 \vee x = a$ otpada, jer ove vrijednosti x nisu rješenja nejednačine (3).

3° Ako je $x(x-a) < 0$, tj. $0 < x < a$, tada je zadovoljen uslov (1), a i nejednačina (3).

Rezultat:

Za $a > 0$ je $0 < x < a$;

za $a = 0$ nejednačina nema rješenja;

za $a < 0$ je $a \leqslant x \leqslant 0$.

16.52. *Uputa*: pošto je $x > 0$, staviti $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$, itd. Rješenja su:

za $a \geqslant -2$, $x \in (0, +\infty)$;

za $a < -2$, $x \in \left(0, \frac{1}{(a+2)^2}\right)$.

16.53. 1° Slučaj $a = 0$ otpada.

2° Ako je $a > 0$, tada, iz uslova $\frac{2a}{x} > 0$ slijedi da je $x > 0$, a tada je i $\frac{x}{a} + 1 > 0$. Iz uslova $\frac{a}{x} - 1 \geqslant 0$ slijedi da je $a \geqslant x$. Prema tome, za $a > 0$ definiciono područje nejednačine je

(1) $$0 < x \leqslant a.$$

3° Za $a < 0$, sličnim rasuđivanjem, zaključuje se da je definiciono područje određeno uslovom

(2) $$a \leqslant x < 0.$$

Uz uslove (1), odnosno (2), nejednačina se svodi na oblik

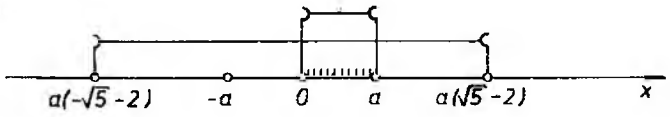
$$2\sqrt{\frac{a}{x}-\frac{x}{a}}<\frac{a}{x}-\frac{x}{a}.$$

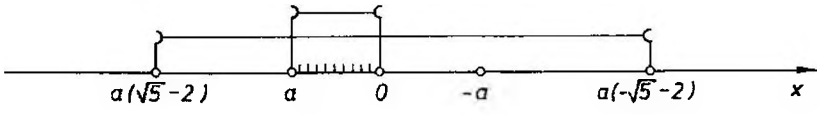
Za $a>0$ skup rješenja je

$$\mathscr{R}=(0,a),$$

a za $a<0$ skup rješenja je

$$\mathscr{R}=(a,0).$$





16.54. Definiciono područje je:
za $a=0$, $D=\emptyset$, za $a>0$, $D=(-a,2a)$, za $a<0$, $D=(2a,-a)$. Treba uvesti novu nepoznatu.
Skup rješenja je:

$$\mathscr{R}=\left(-a,\frac{a}{2}\right) \quad \text{za } a>0;$$

$$\mathscr{R}=\left(\frac{a}{2},-a\right) \quad \text{za } a<0;$$

a za $a=0$, kako smo rekli, nejednačina nije definisana.

16.55. 1° Za $x>a$ nejednačina se svodi na uslov $x>1-a$ i kako je $a>1-a$, rješenja čine interval $(a,+\infty)$.

2° Za $x<a$, odnosno za $-a\leqslant x\leqslant a$, nejednačina je ekvivalentna uslovu $x<1-a$. Kako je $-a<1-a$ (i kako je $x+a>0$), rješenja zadovoljavaju uslove $-a<x<1-a$.

3° Slučaj $x=a$ otpada.

17. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA. EKSPONENCIJALNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

17.1. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

17.1. *Rješenje*: a) 1° Domen $D(f)$ date funkcije je skup realnih brojeva R.

2° Nule: $f(x) = 0$, tj. $2^x - 1 = 0$ za $x = 0$.

3° Znak: $f(x) > 0$, za $x > 0$, $f(x) < 0$ za $x < 0$.

4° Intervali monotonosti:

$(\forall x_1, x_2 \in R)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = 2^{x_1} - 1 < 2^{x_2} - 1 = f(x_2)$, tj. data funkcija (strogo) monotono raste na R.

b) 1° $D(f) = R$.

2° $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

3° $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$. $\qquad f(x) < 0 \Leftrightarrow x < \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

4° Očigledno, funkcija f stalno raste na R.

c) 1° $D(f) = R \setminus \{0\}$.

2° Za $x < 0$ izrazi $e^{1/x}$ i $(-x)$ su pozitivni, pa funkcija f nema nula u intervalu $(-\infty, 0)$. Međutim, za $x > 0$ izraz $e^{1/x}$ je pozitivan, a izraz $(-x)$ negativan, pa u intervalu $(0, +\infty)$ funkcija f ima nulu x_0 (i to samo jednu, budući da je, očigledno, funkcija f strogo monotona u tom intervalu), koja se može odrediti približno, npr., grafički (crtajući grafike funkcija $f(x) = e^{1/x}$ i $g(x) = x$).

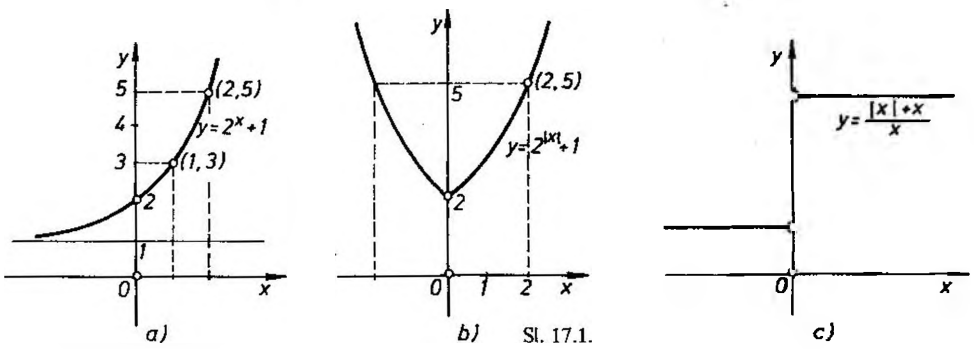
3° $f(x) < 0$ za $x > x_0$, $\quad f(x) > 0$ za $x < x_0$, $\quad x \neq 0$.

4° Očigledno, funkcija strogo opada u intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty)$, tj. funkcija f je strogo monotona po dijelovima (dok na svom domenu funkcija f nije monotona).

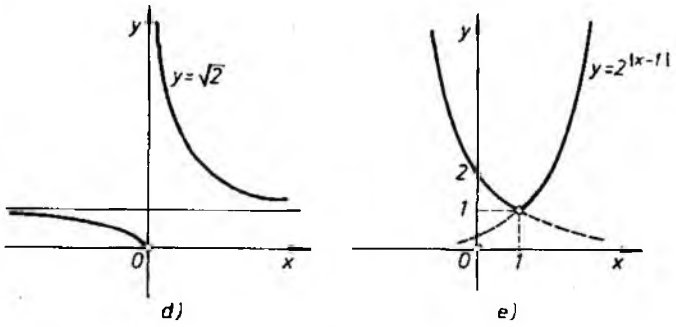
d) 1° $D(f) = (-\infty, 0]$. $\qquad$ 3° $f(x) > 0$ u intervalu $(-\infty, 0)$.

2° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\qquad$ 4° Očigledno, funkcija f je strogo opadajuća.

17.2. Funkcije su prikazane na slikama 17.2. a), b), c), d) i e).

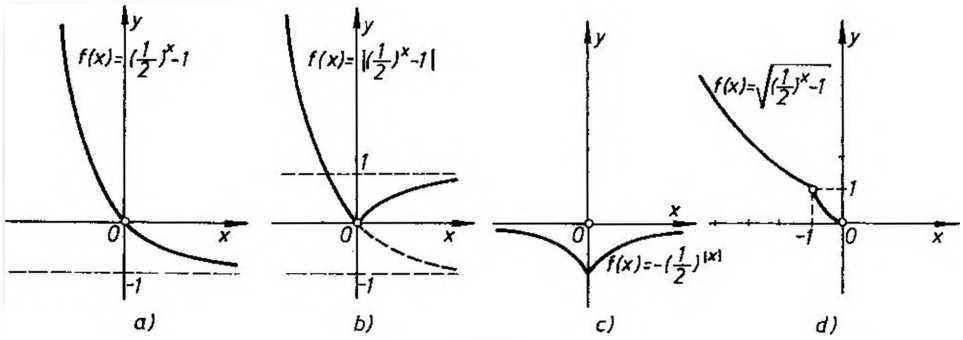


Sl. 17.1.



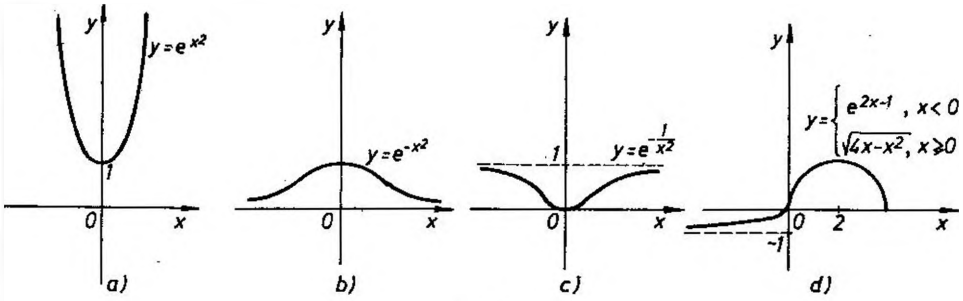
Sl. 17.2.

17.3. Funkcije su prikazane na slikama 17.3. a), b), c), d).



Sl. 17.3

17.4. Funkcije su prikazane na slikama 17.4. a), b), c) i d).



Sl. 17.4.

17.5. a) Kako je domen $D(f) = R$ funkcije f simetričan u odnosu na nulu i kako je

$$(\forall\, x \in R)\, f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-x} + a^{x}) = f(x),$$

to zaključujemo da je funkcija f parna.

Funkcija g je neparna, a o parnosti (neparnosti) funkcije h nema smisla govoriti, budući da njen domen nije simetričan skup u odnosu na O.

17.7. *Rješenje*: Kako je

$$4^x - 4^{x-2} = 240 \Leftrightarrow 4^{x-2}(4^2 - 1) = 240 \Leftrightarrow 4^{x-2} = 4^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2,$$

to data jednačina ima (jedinstveno) rješenje $x = 4$.

17.8. *Rješenje*: Definiciono područje date jednačine je $D = \{x \in R : x \neq 0\} = R \setminus \{0\}$. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$5^{-2} = 5^{1/2x},$$

a ova, dalje, jednačini $2x = -\frac{1}{2}$, $(x \in D)$. Dakle, rješenje date jednačine je

$$x = -\frac{1}{4}.$$

17.9. Brojevi 32, 128 i 0,25 se mogu pisati u obliku 2^5, 2^7 i 2^{-2}, respektivno, pa je data jednačina ekvivalentna jednačini

$$2^{5 \cdot \frac{4x-6}{2}} = 2^{-2+7\cdot(2x-3)}.$$

Rezultat je $x = 2$.

17.10. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$8^{x-\frac{2}{3}} = 5^{x-\frac{2}{3}},$$

odnosno jednačini

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{x-\frac{2}{3}} = 1.$$

Prema tome, rješenje jednačine je $x = \frac{2}{3}$.

17.11. Svesti jednačinu na oblik

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x = 1.$$

Rezultat je $x = 0$.

17.12. *Rješenje*: Posmatraćemo sljedeće slučajeve:

a) $a = 0 \vee b = 0$ i b) $a > 0 \wedge b > 0$.

U slučaju a) imamo tri mogućnosti:

1° $a = 0 \wedge b = 0$.

U ovom slučaju mora biti

$$x^2 + 2x - 8 > 0 \wedge -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 8 > 0.$$

Rješenja ovog sistema nejednačina su svi $x \in (2, 8)$.

2° $a = 0 \wedge b > 0$.

U ovom slučaju jednačina nema rješenja (jer je lijeva strana jednaka nuli (uz uslov $x^2 + 2x - 8 > 0$) a desna to nije).

3° $a > 0 \wedge b = 0$.

Ni u ovom slučaju nema rješenja.

U slučaju b) imamo sljedeće četiri mogućnosti:

1° $a = 1 \wedge b = 1$.

U ovom slučaju jednačinu, očigledno, zadovoljava svako realno x.

2° $0 < a \neq 1 \wedge b = 1$.

Očito mora biti $x^2 + 2x - 8 = 0$, pa su rješenja $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

3° $a = 1 \wedge 0 < b \neq 1$.

U ovom slučaju mora biti $-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 8 = 0$, pa su rješenja $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

$4^\circ\ 0 < a \neq 1 \wedge 0 < b \neq 1.$

Logaritmovanjem (po bazi 10) date jednačine, dobijemo:

$$(x^2 + 2x - 8)\cdot \log a = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 8\right)\cdot \log b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log a + \frac{1}{2}\log b\right)x^2 + (2\log a - 5\log b)x - 8(\log a - \log b) = 0.$$

Ako je $\log a + \frac{1}{2}\log b = 0$, tj. $b = \frac{1}{a^2}$, dobijemo linearnu jednačinu čije je rješenje $x = 2$.

Ako je $\log a + \frac{1}{2}\log b \neq 0$, tj. $b \neq \frac{1}{a^2}$, imamo

$$x_{1,2} = \frac{5\log b - 2\log a \pm \sqrt{(6\log a - 3\log b)^2}}{2\log a + \log b}$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{8(\log b - \log a)}{2\log a + \log b}.$$

17.13. a) Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$3^{12x-3}(3^2 - 3 - 1 + 3^7) = 2192,$$

odnosno jednačini

$$3^{12x-3} = 1,$$

koja se svodi na oblik $12x - 3 = 0$.

Prema tome, rješenje jednačine je $x = \frac{1}{4}$.

b) $x = \frac{3}{2}$.

17.14. Pomnožiti jednačinu sa 3^x, pa uvesti smjenu $y = 3^x$.

Rezultat je $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{\log 2}{\log 3} - 1.$

17.15. Uvesti smjenu $y = 3^{x^2-3}$.

Rezultat je:

$$x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \sqrt{2}.$$

17.16. $x = \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

17.17. Pošto kod funkcije $y = a^x$ mora biti $a > 0$, lako je uočiti da za sve vrijednosti x vrijedi formula

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x \geqslant 2.$$

Znak $=$ vrijedi samo ako je $a = 1$, ili $x = 0$.

Ako je $a \neq 1$ i $x \neq 0$, funkcija $y = a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x$ prima sve vrijednosti veće od 2.

Na slici 17.5, uzeto je da je $a = 2$, pa je $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$.

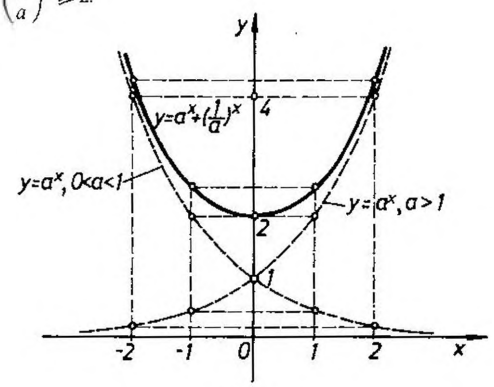
Prema tome, jednačina

$$a^x + \left(\frac{1}{a}\right)^x = m$$

ima rješenje ako je:

$1^\circ\ a = 1,\ m = 2$; tada je svako $x \in R$ rješenje.

$2^\circ\ 0 < a \neq 1,\ m > 2$; tada za $m = 2$ imamo tačno jedno rješenje $x = 0$, a za $m > 2$ dva rješenja: $x_1 = -x_2 \neq 0$.



Sl. 17.5.

17.18. Jednačinu podijeliti sa 2^{2x}, pa uvesti smjenu $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Rezultat je $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.

17.19. Jednačinu podijeliti sa 8^x, pa uvesti podesnu smjenu. (Primijetiti da je $18^x = 2^x \cdot 3^{2x}$.) Rezultat je $x = 0$.

17.20.* Definiciono područje date jednačine je polusegment $[0, \infty)$. Ona je ekvivalentna jednačini

$$9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} - 3^{\sqrt{x}+x} = 9^x - 9^{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{\sqrt{x}+x} + 9 \cdot 3^{2\sqrt{x}} - 3^x(3^{\sqrt{x}} + 3^x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x + 3^{\sqrt{x}}) \cdot (9 \cdot 3^{\sqrt{x}} - 3^x) = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{\sqrt{x}} = 3^x \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

Dakle, data jednačina ima rješenje $x = 4$.

17.21.* *Rješenje*: Uvedemo li smjenu,

$$\frac{x}{2} = y,$$

dobijemo jednačinu

$$1 + 3^y = 2^{2y},$$

$$1 + 3^y = 4^y. \tag{1}$$

Pogađamo da je jedno rješenje $y = 1$. Dokazaćemo da je ono i jedino. Dijeljenjem jednačine (1) sa 4^y dobijemo

$$\left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y = 1.$$

Kako je funkcija $\left(\frac{1}{4}\right)^y$ monotono opadajuća, kao i funkcija $\left(\frac{3}{4}\right)^y$, to važi i za njihov zbir, pa imamo:

$$y < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y > \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1;$$

$$y > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y < \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1,$$

Otuda imamo:

$$y \neq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y + \left(\frac{3}{4}\right)^y \neq 1 \Rightarrow 1 + 3^y \neq 4^y.$$

Dakle, jedino rješenje jednačine (1) je $y = 1$, pa je $x = 2$ jedino rješenje date jednačine.

17.22. 1° Ako je $3^{x+2} < 1 = 3^0$, tj. $x < -2$, jednačina ima oblik

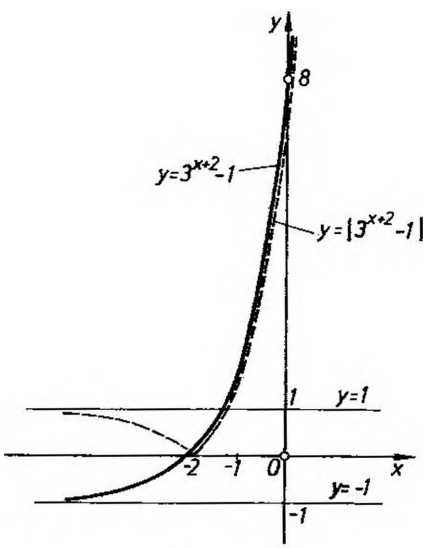
$$-3^{x+2} + 1 = 3^{x+2} - 1,$$

odakle slijedi da je $x = -2$. Međutim, formule $x < -2$ i $x = -2$ protuvrječne su, pa jednačina nema rješenja u intervalu $(-\infty, -2)$ (sl. 17.6).

2° Ako je $x \geqslant -2$, jednačina je identitet (sl. 17. 6).

Skup rješenja jednačine je

$$\mathscr{R} = [-2, +\infty).$$



Sl. 17.6.

17.23. Stavimo li $3^{-|x-2|} = y$, dobijemo:

$$y^2 - 4y - a = 0,$$

$$y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a}, \quad 4 + a \geqslant 0.$$

Slučaj $y = 2 + \sqrt{4 + a}$ otpada, jer je $2 + \sqrt{4 + a} \geqslant 2$, dok je $3^{-|x-2|} \leqslant 1$. Jednačina

$$3^{-|x-2|} = 2 - \sqrt{4 + a}$$

ima rješenje samo za one vrijednosti parametra a za koje je

$$4 + a \geqslant 0 \wedge 0 < 2 - \sqrt{4 + a} \leqslant 1.$$

Rezultat: za $-3 \leqslant a < 0$, $x_{1,2} = 2 \pm \log_3(2 - \sqrt{4 + a})$.

17.24.* *Rješenje*: Očito je $x = 1$ jedno rješenje date jednačine.

Ako je $x > 1$, tada imamo:

$$2^x > 2^1 = 2 > 3 - x,$$

a za $x < 1$ imamo

$$2^x < 2^1 = 2 < 3 - x.$$

Dakle, za $x \neq 1$ je $2^x \neq 3 - x$,
pa je $x = 1$ jedino rješenje date jednačine.

17.25. Definiciono područje date jednačine je interval $(0, +\infty)$. Očito je $x_1 = 1$ jedno rješenje date jednačine. Kako je

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x} \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{x}{2}},$$

to za $x \neq 1$ imamo

$$\sqrt{x} = \frac{x}{2},$$

odakle se dobije $x = 4$.

Rješenja su: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

17.26.* *Rješenje*: Pošto je $a^x > 0$ (jer pretpostavljamo da je $a > 0$) za sve $x \in R$, mora biti:

$$|x + 2| > |2x + 8|,$$

$$(x + 2)^2 > (2x + 8)^2,$$

$$3x^2 + 28x + 60 < 0,$$

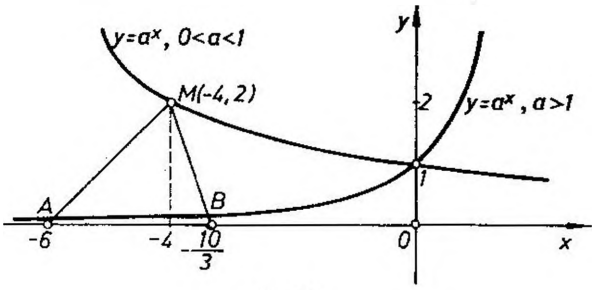
dakle,

$$(1) \quad -6 < x < -\frac{10}{3}.$$

Ako data jednačina ima rješenja, moraju pripadati intervalu (1). Na slici 17.7. je nacrtan grafik funkcije

$$y = |x + 2| - |2x + 8|$$

u intervalu (1).



Sl. 17.7.

a) Da bi jednačina imala tačno jedno rješenje, grafik funkcije $y = a^x$ mora prolaziti tačkom $M(-4, 2)$ (jer on ne može prolaziti tačkama $A(-6.0)$ ili $B\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$. Tada iz jednačine $2 = a^{-4}$ slijedi $a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

b) Za $a > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ grafik funkcije $y = a^x$ siječe liniju AMB u dvije tačke, tj. jednačina ima dva rješenja.

c) Za $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ grafik funkcije $y = a^x$ nema zajedničkih tačaka sa linijom AMB, pa jednačina nema rješenja.

17.27. Pošto je $(1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 = -4$, data nejednačina poprima oblik

$$(3 + 4i)^{x-1} = 5^x - 4.$$

Kako je $5^x - 4 > 0$ za $x \in N$, to je $|5^x - 4| = 5^x - 4$, pa dalje imamo:

$$|3 + 4i|^{x-1} = 5^x - 4,$$

$$(\sqrt{9 + 16})^{x-1} = 5^x - 4,$$

$$5^{x-1} = 5^x - 4,$$

$$x = 1.$$

17.3. SISTEMI JEDNAČINA OD KOJIH JE BAR JEDNA EKSPONENCIJALNA

17.28. *Rješenje:* Iz druge jednačine datog sistema je $y = 2 + x$, pa zamjenom u prvu jednačinu, dobijemo sistem

$$3^x \cdot 2^{2+x} = \frac{1}{9}, \quad y = 2 + x,$$

koji se svodi na oblik

$$6^x = 6^{-2}, \; y = 2 + x.$$

Dati sistem ima (jedinstveno) rješenje:

$$x = -2, \; y = 0.$$

17.29. a) Napisati sve korijene u obliku stepena

$$\mathscr{R} = \{(6, 3), (-3, 3)\}.$$

b) Primijetiti da je $512\,000 = 2^{12} \cdot 5^3$.

$$\mathscr{R} = \{(3, 4)\}.$$

17.30. Međusobnim množenjem jednačina sistema dobije se:

$$(3 \cdot 5)^{x+y} = 15^3 \Rightarrow x + y = 3.$$

Rješenje sistema je $x = 1$, $y = 2$.

17.31. U prvoj jednačini uvesti smjenu $z = 2^{\frac{x+y}{6}}$, naći z, pa odatle i $\frac{x+y}{6}$. Rezultat je: $x_1 = 3$, $y_1 = 3$; $x_2 = 5$, $y_2 = 1$.

17.32. Uvesti smjenu $u = 64^x$, $v = 64^y$.

Rješenja sistema su:

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad y_1 = \frac{1}{6}; \quad x_2 = \frac{1}{6}, \quad y_2 = \frac{1}{4}.$$

Rezultat: $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{64}$.

17.33. Sistem je difinisan za $x > 0$, $y > 0$. Iz prve jednačine dobijemo $x = y$, pa iz druge slijedi jednačina $x = x^{1/x}$. Njeno rješenje je $x = 1$ (obrazložiti!)

Dakle, rješenje sistema je

$$(x, y) = (1, 1)$$

17.34.* Ako drugu jednačinu napišemo u obliku

$$2^{x+2y}(x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y}) = 1,$$

tada, uzimajući u obzir prvu jednačinu, dobijemo:

$$2^{x+2y+1} = 1,$$

$$x + 2y + 1 = 0,$$

$$x = -2y - 1.$$

Kada ovaj izraz za x uvrstimo u prvu jednačinu datog sistema, nakon sređivanja dobijemo jednačinu

$$2^{3(y+1)} = -(4 + 5y). \tag{1}$$

Pošto je $2^{3(y+1)} > 0$, mora biti $-(4 + 5y) < 0$, tj.

$$y < -\frac{4}{5}.$$

1° Ako je u jednačini (1) $3(y + 1) > 0$, tj.

$$y < -1, \tag{2}$$

tada mora biti $-(4 + 5y) < 1$, tj.

$$y > -1. \tag{3}$$

Prema uslovima (2) i (3) ovaj slučaj otpada.

2° Ako je u jednačini (1) $3(y + 1) > 0$, tada slijede protivrječni uslovi $y > -1$ i $y < -1$, pa i ovaj slučaj otpada.

3° Ako je $3(y+1)=0$, tj. $y=-1$, jednačina (1) je zadovoljena. Tada iz jednačine $x=-2y-1$ slijedi da je $x=1$.

Provjera pokazuje da je

$$x=1,\ y=-1$$

stvarno rješenje sistema.

17.35.* *Rjšenje*: Pošto je $|x|=|-x|$ i $x^2=(-x)^2$, ako je (x_1, y_1) rješenje sistema, tada je i $(-x_1, y_1)$ njegovo rješenje. Iz uslova zadatka slijedi da mora biti $x_1=-x_1=0$. Ako u dati sistem uvrstimo $x=x_1=0$ i $y=y_1^2$, dobijemo

$$y_1+a=1 \wedge y_1^2=1.$$

Odavde slijedi $(1-a)^2=1$, tj.

$$a_1=0,\ a_2=2.$$

1° Za $a=0$ dobijemo sistem

$$2^{|x|}+|x|=y+x^2,\quad x^2+y^2=1,$$

čije je rješenje $x=0$, $y=1$. Pokažimo da on nema drugih rješenja. Dovoljno je dokazati da ne postoji rješenje (x, y) za $x>0$, jer ako ono ne postoji, tada ne postoji ni rješenje (x, y), $x<0$. Iz jednačine $x^2+y^2=1$ slijedi da je $|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1$. Ako je $x>0$, tj. $0<x\leqslant 1$, tada je $x^2\leqslant x$ tj. $-x^2+x\geqslant 0$. Zato iz jednačina (1), tj.

$$y=2^x-x^2+x$$

slijedi da je $y>1$. Ovo se, međutim, kosi sa zaključkom da je $|y|\leqslant 1$.

Znači, za $a=0$ dati sistem ima jedinstveno rješenje (to je par (0, 1)).

2° Ako je $a=2$, tada dobijemo sistem

$$y=2^x-x^2+x-2,\quad x^2+y^2=1,$$

čija su rješenja (ne tvrdimo sva) parovi (0, −1), (1, 0)

Rezultat: $a=0$.

17.36. Kako je $18=2\cdot 3^2$, $500=4\cdot 5^3$, $12348=2^2\cdot 3^2\cdot 7^3$, to sistem možemo pisati u obliku

$$2^{x-1}\cdot 3^{y-2}=1,\quad 2^{2(x-1)}\cdot 5^{z-3}=1,\quad 6^{y-2}\cdot 7^{z-3}=1.$$

Uvedemo li smjenu $u=x-1$, $v=y-2$, $w=z-3$, dobijemo sistem:

$$2^u\cdot 3^v=1,\quad 2^{2u}\cdot 5^w=1,\quad 6^v\cdot 7^w=1.$$

Eliminisanjem u iz prve dvije jednačine ovog sistema dobijemo sistem

$$5^w\cdot 3^{-2v}=1,\quad 7^w\cdot 6^v=1.$$

Logaritmovanjem obiju jednačina ovog sistema dobijemo homogen sistem od dvije linearne jednačine sa dvije nepoznate v i w:

$$w\log 5-2v\log 3=0,\quad w\log 7+v\log 6=0.$$

Determinanta ovog sistema je $D=\log 5\log 6+\log 7\log 9\neq 0$, pa sistem ima samo trivijalno rješenje $v=0$, $w=0$. Iz jednačine $2^u\cdot 3^v=1$, zbog $v=0$, dobijemo da je i $u=0$. Dakle, imamo $u=v=w=0$. tj. $x-1=y-2=z-3=0$ i odatle imamo da je rješenje sistema $x=1$, $y=2$, $z=3$.

17.37. *Uputstvo*: $[(z^y)^y=z^{y^2}=x=z^x]\Rightarrow(y^2=x\vee z=1)$ itd.

Rezultat: $x_1=y_1=z_1=1$; $x_2=4$, $y_2=2$, $z_{2,3}=\pm\sqrt{2}$.

17.4. EKSPONENCIJALNE NEJEDNAČINE

17.38. *Rješenje*: Kako je

$$\frac{1}{25^{3-x}}-625^{1-2x}<0\Leftrightarrow 5^{2x-6}<5^{4-8x}\Leftrightarrow 2x-6<4-8x\Leftrightarrow x<1,$$

to je svako x iz intervala $(-\infty, 1)$ rješenje date nejednačine.

17.39. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$|x^3 - 1| > 1 - x.$$

Jedan interval njenih rješenja je

$$(1, +\infty).$$

Ako je $1 - x \geqslant 0$, tj. $x \leqslant 1$, dobijemo nejednačinu

$$x(x-1)(x+1) < 0$$

i još dva intervala rješenja:

$$(-\infty, -1), \quad (0, 1).$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

17.40. *Rješenje*: 1° Ako je $2^{x+1} - 1 < 0$, tj. $x < -1$, imamo:

$$-2^{x+1} + 1 > 2^{x+1} \Leftrightarrow 2^{x+1} < \frac{1}{2},$$

$$x + 1 < -1 \Leftrightarrow x < -2.$$

Jedan skup rješenja je, dakle,

$$\mathscr{R}_1 = (-\infty, -2)$$

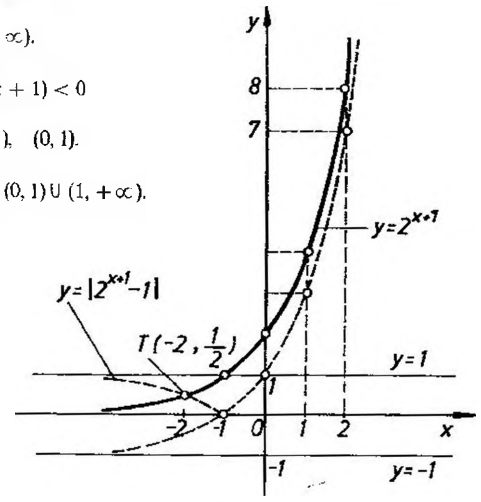
(sl. 17.8).

2° Ako je $2^{x+1} - 1 \geqslant 0$, tj $x \geqslant -1$, imamo:

$$2^{x+1} - 1 > 2^{x+1} \Leftrightarrow -1 > 0,$$

što je nemoguće. Skup rješenja nejednačine je

$$\mathscr{R} = (-\infty, -2).$$



Sl. 17.8.

17.41. Pošto je $x + 2 = 0$ za $x = -2$ i $2^{x+1} - 1 = 0$ za $x + 1 = 0$, tj. za $x = -1$, nejednačinu posmatramo u intervalima $(-\infty, -2)$, $[-2, -1)$ i $[-1, +\infty)$.

1° U intervalu $(-\infty, -2)$ data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$2^{-x-2} + 2^{x+1} - 1 > 2^{x+1} + 1,$$

odnosno

$$2^{-x-2} > 2,$$

dakle slijedi da je

$$x < -3.$$

Odatle, i iz uslova da je $x \in (-\infty, -2)$ slijedi

$$\mathscr{R}_1 = (-\infty, -3).$$

2° U intervalu $[-2, -1)$ iz date nejednačine slijedi da je

$$x > -1,$$

pa ona u tome intervalu nema rješenja.

3° U intervalu $[-1, +\infty)$ dobijemo nejednačinu

$$2^{x+2} > 2^{x+2},$$

koja, očito, nema rješenja.

Skup rješenja date nejednačine je

$$\mathscr{R} = (-\infty, -3).$$

17.42. Dijeljenjem sa $2^{\sqrt{x}+x}$ nejednačina se svodi na oblik $2^{x-\sqrt{x}} \leqslant 3 + 4 \cdot 2^{\sqrt{x}-x}$. Smjenom $2^{x-\sqrt{x}} = y$ dobijemo nejednačinu $y^2 - 3y - 4 \leqslant 0$, odakle je $-1 \leqslant y \leqslant 4$, odnosno $0 < y \leqslant 4$. Pošto je $x \geqslant 0$, dobije se $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2$, tj. na kraju

$$\mathscr{R} = [0, 4].$$

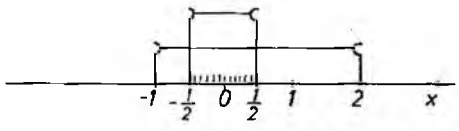
17.43. *Rješenje*: Nejednačina je definisana za $x \neq 0$.

1° Ako je $|2x| < 1$, tj. $|x| < \frac{1}{2}$, imamo:

$$x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

U ovom slučaju je skup rješenja:

$$\mathscr{R}_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{(sl. 17.9).}$$



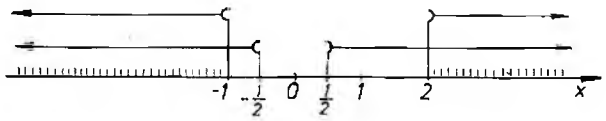
Sl. 17.9.

2° Ako je $|2x| > 1$, tj. $|x| > \frac{1}{2}$, imamo:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \vee x > 2).$$

Sada je skup rješenja (sl. 17.10):

$$\mathscr{R}_2 = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$



Sl. 17.10.

3° U slučaju $x = \frac{1}{2}$ nema rješenja.

Skup rješenja nejednačine je

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty).$$

17.44. Dobije se nejednačina

$$2^{-2x} - 2 \cdot 2^{-x} - 8 < 0,$$

odakle slijedi

$$-2 < 2^{-x} < 4,$$
$$x > -2.$$

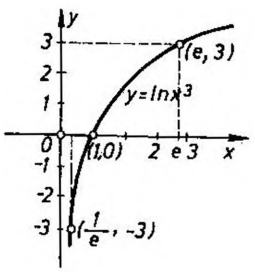
18. LOGARITAMSKA FUNKCIJA. LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE. SISTEMI LOGARITAMSKIH JEDNAČINA

18.1. LOGARITAMSKA FUNKCIJA

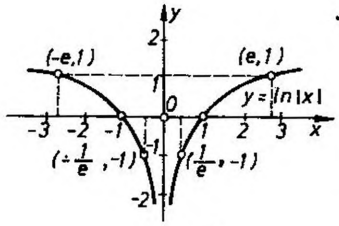
18.1. a) Definiciono područje funkcije $y = \ln x^3$ je interval $(0, +\infty)$. U tome intervalu vrijedi jednakost

$$\ln x^3 = 3 \ln x,$$

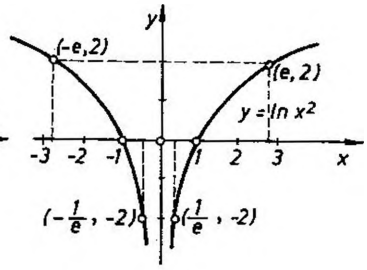
koja nam olakšava crtanje grafika na slici 18.3.



Sl. 18.3.



Sl. 18.4.



Sl. 18.5.

b) Definiciono područje funkcije $y = \ln|x|$ je skup $R \setminus \{0\}$. Na intervalu $(0, +\infty)$ grafik funkcije $y = \ln|x|$ podudara se sa grafikom funkcije $y = \ln x$, a preostali dio grafika u intervalu $(-\infty, 0)$ dobije se osno simetričnim preslikavanjem prvog dijela grafika u odnosu na osu y (sl. 18.4).

c) Funkcija $y = \ln x^2$ definisana je na skupu $R \setminus \{0\}$. Za $x < 0$ ne vrijedi jednakost

$$\ln x^2 = 2 \ln x,$$

jer funkcija $y = \ln x$ nije definisana za $x < 0$. Kako je uvijek $x^2 = |x|^2$ i $|x| > 0$, za $x \neq 0$, to vrijedi

$$\ln x^2 = \ln |x|^2 = 2 \ln |x|.$$

Na osnovu toga možemo nacrtati grafik funkcije $y = \ln x^2$ (sl. 18.5).

18.2. Funkcija f je definisana na skupu $R \setminus \left\{\frac{5}{2}\right\}$. Funkcija f nije injektivna, jer je, na primjer,

$$f(2) = \ln|2 \cdot 2 - 5| = \ln|-1| = 0 = \ln|1| = \ln|2 \cdot 3 - 5| = f(3).$$

Funkcije

$$f_1 : \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \to R, \quad f_1(x) = \ln|2x - 5|,$$

$$f_2 : \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \to R, \quad f_2(x) = \ln|2x - 5|$$

su injektivne. Za funkciju f_1, naime, vrijedi:

$$\left(\forall\, x_1, x_2 \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)\right) f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|2x_1 - 5| = \ln|2x_2 - 5| \Rightarrow \ln(-2x_1 + 5) = \ln(-2x_2 + 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x_1 + 5 = -2x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

jer je u intervalu $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ $|2x_1 - 5| = -(2x_1 - 5)$ i $(2x_2 - 5) = -(2x_2 - 5)$. Slično vrijedi i za funkciju f_2.

Funkcije f_1 i f_2 su sirjektivne. Tako, za funkciju f_1, za bilo koju vrijednost $y \in R$ vrijedi: $-\frac{1}{2}e^y + \frac{5}{2} < \frac{5}{2}$ (jer je $e^y > 0$), tj. $-\frac{1}{2}e^y + \frac{5}{2} \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ i ako stavimo da je $-\frac{1}{2}e^y + \frac{5}{2} = x$, dobijemo da je

$$x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right),\ f_1(x) = \ln|2x - 5| = \ldots = y.$$

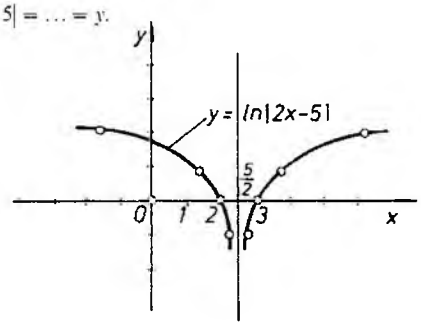
Slično se zaključuje za funkciju f_2 (polazeći od tačne nejednakosti $\frac{1}{2}e^y + \frac{5}{2} > \frac{5}{2}$).

Prema tome, funkcije f_1 i f_2 su bijektivne.

Intervali $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ i $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ su traženi maksimalni skupovi, a pokazuje se da su inverzne funkcije funkcija f_1 i f_2 određene formulama

$$f_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{5}{2},\quad f_2^{-1}(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{5}{2}.$$

Grafik funkcije f nacrtan je na slici 18.6.



Sl. 18.6.

18.3. Definiciono područje $D = (0,2) \setminus \{1\}$ datog izraza određuje se iz uslova

$$(0 < 2 - x \neq 1) \wedge x + 1 \geqslant 0 \wedge 2x > 0 \wedge \sqrt{x+1} > \frac{x-2}{\sqrt{2x}}.$$

18.4. Posmatrani izraz ima realne vrijednosti ako je

$$x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right).$$

18.5. $f(3) = \log_2(\log_3(\log_4((4^3)^{(3^3)})))=$
$= \log_2(\log_3(3^3 \log_4 4^3)) = (\text{zbog } \log_4 4^3 = 3)$
$= \log_2(\log_3 3^4) = \log_2 4 = 2.$

Kako je $f(x) = \log_2(\log_3(x^x \cdot x)) = \log_2(\log_3 x^{x+1})$, to je definiciono područje posmatrane funkcije

$$D = \{x \in R \mid x > 0 \wedge \log_3 x^{x+1} > 0\},$$

dakle,

$$D = \{x \in R \mid x^{x+1} > 1\} = (1, +\infty).$$

18.6. $\log_6 9 = 2\log_6 3 = 2\log_6 \frac{6}{2} = \ldots = 2(1 - a).$

18.7. Neka je $\log_2 3 = x$, $\log_3 4 = y$. Kako je $2^x = 3 > \sqrt{8} = 2^{\frac{3}{2}}$, to je $x > \frac{3}{2}$, a kako je $3^y = 4 < \sqrt{27} = 3^{\frac{3}{2}}$, to je $y < \frac{3}{2}$. Sada je lako zaključiti da je $\log_2 3 > \log_3 4$.

18.8. *Uputa*: svesti sve logaritme na lijevoj strani znaka jednakosti na bazu $n + 1$ (vidjeti formulu 18.7).

18.9. Zaključiti da posmatrani logaritmi postoje, tj. da je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $a \neq b$. Data se jednakost može svesti na ekvivalentnu jednakost

$$\log|a| + \log|b| = \log|a| + \log|b|,$$

koja je tačna, pa je tačna i posmatrana jednakost.

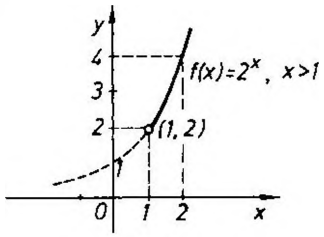
18.11. a) Jednačina je definisana za $x > 1$ i $f(x) > 0$, a tražena funkcija je

$$f: D(f) \to R,\quad f(x) = a^x,\quad x > 1,\ 0 < a \neq 1.$$

b) Za $a = 2$ imamo funkciju

$$f: (1, +\infty) \to (2, +\infty),\ f(x) = 2^x,$$

čiji je grafik prikazan na slici 18.7.



Sl. 18.7.

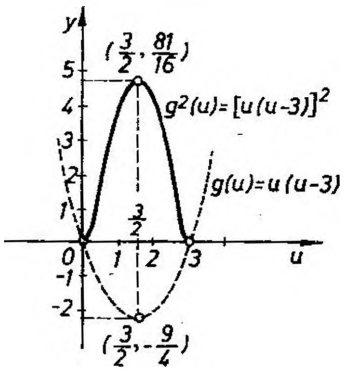
18.12.* *Napišimo formulu funkcije f u obliku*

$$f(x) = [\log_2 x(\log_2 x - 3)]^2.$$

Pomoću zamjene $\log_2 x = u$ dobijemo formulu

$$f(x) = [u(u-3)]^2.$$

Funkcija g data formulom $g(u) = u(u-3)$ je negativna u intervalu $(0,3)$ i ima minimum $-\frac{9}{4}$ za $u = \frac{3}{2}$. Funkcija g^2 je u intervalu $(0,3)$ pozitivna i ima maksimum $\frac{81}{16}$ za $u = \frac{3}{2}$ (sl. 18.8).



Sl. 18.8.

Za vrijednost $u = 0 = \log_2 x$ je $x = 1$, a za $u = 3 = \log_2 x$ je $x = 8$, pa funkcija f ima maksimum u intervalu $(1, 8)$ i to za vrijednost x za koju je $\log_2 x = u = \frac{3}{2}$, tj. za $x = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}$, i taj je maksimum jednak $\frac{81}{16}$.

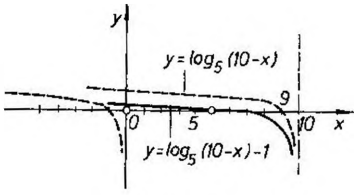
Napominjemo da je ovaj zadatak riješen na drugi način, kao zadatak 10.65.

18.13. Primijenimo li jednakost $10^{\log a} = a$ (vidjeti drugu formulu 18.1'), dobijemo da je $x = 5$, a zatim da je

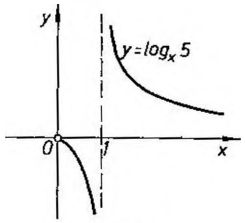
$$f(5) = 0$$

(što znači da je broj 5 nula funkcije f).

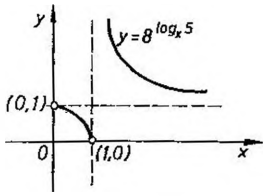
Grafik posmatrane funkcije se dobije kada se grafik funkcije $y = \log_5(-x)$ (koji je simetričan grafiku funkcije $y = \log_5 x$ u odnosu na y-osu) pomjeri translatorno duž x-ose za veličinu 10, a zatim (tako nastali grafik) pomjeri translatorno za -1 u pravcu y-ose (sl. 18.9).



Sl. 18.9.



Sl. 18.10.



Sl. 18.11.

18.14. a) $f(2) = 8^{\log_2 5} = 2^{3\log_2 5} = 2^{\log_2 5^3} \overset{(1)}{=} 5^3 = 125.$

Na mjestu (1) pogledati formulu 18.1'.

Izraz $\log_x 5$ je definisan za $0 < x \neq 1$, pa je definiciono područje funkcije f

$$D(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

c) Grafik funkcije g date formulom $g(x) = \log_x 5$ možemo, prema formuli (1), dobiti dijeleći broj $\log 5$ ordinatama funkcije $h(x) = \log x$ (sl. 18.10). Sada se grafik funkcije f može dobiti iz grafika funkcije g, vodeći računa o izgledu grafika eksponencijalne funkcije $y = a^t$ (sl. 18.11). Na grafiku funkcije f se vidi da je skup vrijednosti te funkcije

$$\mathrm{Im}(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

18.15. Kako vrijedi ekvivalencija

$$\frac{2}{9} < \log(x + y) < 1 \Leftrightarrow 10^{\frac{2}{9}} < x + y < 10$$

i kako je $x + y = 10^{\frac{2}{3}} + 10^{\frac{1}{3}}$, dovoljno je dokazati da je

$$10^{\frac{2}{9}} < 10^{\frac{2}{3}} + 10^{\frac{1}{3}} < 10. \tag{1}$$

Pošto je

$$10^{\frac{2}{9}} < 10^{\frac{2}{3}} < 10^{\frac{2}{3}} + 10^{\frac{1}{3}}$$

lijeva nejednakost u (1) je tačna. Ako desnu nejednakost u (1) podijelimo sa $-10^{\frac{1}{3}}$, dobijemo tačnu nejednakost

(2) $$(10^{\frac{1}{3}})^2 - 10^{\frac{1}{3}} - 1 > 0.$$

Ako, naime, stavimo da je $10^{\frac{1}{3}} = u$, tada imamo:

$$u^2 - u - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(u < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee u > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),$$

a kako je $10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} > 2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, nejednakost (2) je tačna.

Time je dokazano da je

$$\frac{2}{9} < \log(x+y) < 1.$$

18.16.* Iz datih uslova za a, b i c je $\log_b a > 0$, $\log_c b > 0$, $\log_a c > 0$, pa se može primijeniti odnos između aritmetičke i geometrijske sredine za izraze

$$\frac{\log_b a}{a+b}, \quad \frac{\log_c b}{b+c} \quad \text{i} \quad \frac{\log_a c}{c+a}$$

i dokazati tačnost posmatrane formule.

18.2. LOGARITAMSKE JEDNAČINE

18.17. Definiciono područje jednačine određuje se iz uslova

$$x + 2 > 0 \text{ i } x - 1 > 0,$$

pa se dobije da je

$$D = (1, +\infty).$$

U skupu D data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$(x+2)(x-1) = 10,$$

čija su rješenja $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$. Kako $-4 \notin D$, to nije rješenje. Provjerom se uvjeravamo da je rješenje jednačine

$$x = 3.$$

18.18. U domeni $D = R \setminus \{0\}$ data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\log^2|x| + 2\log|x| - 3 = 0,$$

odakle slijedi da je $(\log|x|)_1 = -3$, $(\log|x|)_2 = 1$.

Rješenja su

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{10^3}, \; x_{3,4} = \pm 10.$$

18.19. U definicionom području $D = \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ data se jednačina svodi na oblik

$$(2a^2+1)x = 4 - 3a^2.$$

Kako je $2a^2 + 1 \neq 0$, iz posljednje jednačine slijedi da je

$$x = \frac{4-3a^2}{2a^2+1}.$$

Postaviti uslove da ova vrijednost x pripada skupu D i pokazati da se ti uslovi svode na tačne nejednakosti $-3 < 8$ i $0 < 11a^2$, što znači da ova vrijednost pripada skupu D. To je i rješenje date jednačine.

18.20. *Uputa:* uvesti smjenu $y = \log(x-1)$. Rješenja su

$$x_1 = 1 + \sqrt[3]{10}, \; x_2 = 1001.$$

18.21. Definiciono područje je skup $(-\infty, 0)$, pa je u tom području

$$\log_4 x^2 = 2\log_4|x| = 2\log_4(-x).$$

Rješenje je $x = -\frac{1}{2}$.

18.22. U domeni jednačine $D = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ je

$$\log\sqrt{8x+4} = \ldots = \frac{1}{2}[\log 4 + \log(2x+1)],$$

$$\log^2(20x+10) = \ldots = [1 + \log(2x+1)]^2.$$

Uvesti smjenu $y = \log(2x+1)$ i pokazati da su rješenja

$$x_1 = -0{,}4995, \quad x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - 1).$$

18.23. $x = 8$.

18.24. Datu jednačinu zemjenjujemo ekvivalentnim sistemom

(1) $\quad |x^4 + 2x^3 + 2x - 1| = (x^2 + x - 1)^2,$

(2) $\quad |x^2 + x - 1| \neq 1,$

(3) $\quad x^2 + x - 1 \neq 0.$

Ako se pažljivo posmatraju uslovi (2) i (3), uočava se da oni obezbjeđuju definisanost date jednačine.

Uz uslove (2) i (3) dolazi jednom jednačina

$$x^4 + 2x^3 + 2x - 1 = (x^2 + x - 1)^2,$$

a drugi put jednačina

$$x^4 + 2x^3 + 2x - 1 = -(x^2 + x - 1)^2.$$

U prvom se slučaju dobije $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$, a u drugom slučaju $x_3 = 0$, $x_{4,5} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$. Slučaj $x = 0$ otpada, jer tada nije zadovoljen uslov (2).

Rješenja jednačine su

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}, \; x_{3,4} = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

18.25. Za znake izraza $1 + \log_{\frac{1}{2}} x$ i $2 - \log_{\frac{1}{2}} x$ u domeni $D = (0, +\infty)$ imamo:

	0		$\frac{1}{4}$		2		$+\infty$
$1 + \log_{\frac{1}{2}} x$		+		+	0	−	
$2 - \log_{\frac{1}{2}} x$		−	0	+		+	

1° U intervalu $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ data se jednačina svodi na tačnu numeričku jednakost $1 = 1$, pa u tome intervalu imamo skup rješenja

$$\mathscr{R}_1 = \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

2° U intervalu $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$ dobijemo da je $x = \frac{1}{4}$, pa je

$$\mathscr{R}_2 = \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

3° U intervalu $(2, +\infty)$ dobijemo netačnu jednakost $-1 = 5$, pa jednačina u tome intervalu nema rješenja.

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 = \left(0, \frac{1}{4}\right].$$

18.26. $x = \frac{9}{4}$.

18.27. $x_1 = 3$, $x_2 = 1 + \frac{1}{4}\sqrt[4]{8}$.

18.28. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\log_x 2 + \log_x 3 + \log_x 5 = 1.$$

Rješenje je $x = 30$.

18.29. Iz date jednačine se dobije:

$$\log_2 \log_2^2 x - \log_2 \log_2 2\sqrt{2}\, x = 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2^2 x}{\log_2 2\sqrt{2}\, x} = 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \ldots$$

Rješenje je $x = 8$.

18.30.* Domena jednačine je $D = (0, +\infty)$. Jedno rješenje je, očigledno, $x = 1$. Za $x \neq 1$ treba jednačinu podijeliti izrazom

$$\log_2 x \cdot \log_3 x \cdot \log_5 x,$$

pa se dobije jednačina kao u zadatku 18.28.

Rješenja su $x_1 = 1$, $x_2 = 30$.

18.31. Uz uslove

(1) $$0 < x \neq 1 \text{ i } 0 < a \neq 1$$

dobijemo jednačinu

(2) $$\log_a^2 x + 2|a + \log_a x| - a = 0.$$

1° Ako je

(3) $$\log_a x + a \geq 0.$$

iz jednačine (2) se dobije da je $(\log_a x)_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$, za $a < 1$. Zbog uslova (3) mora za $(\log_a x)_1$ biti

$$-1 - \sqrt{1-a} + a \geq 0, \text{ tj. } \sqrt{1-a} \leq a - 1.$$

što je moguće samo ako je $a = 1$, ali tada nije zadovoljen uslov (1). Za $(\log_a x)_2$ dobijemo (zbog uslova (3))

$$\sqrt{1-a} \geq 1 - a,$$

a ovo je tačno za $0 < a < 1$.

2° Ako je

(4) $$\log_a x + a < 0,$$

iz jednačine (2) slijedi

$$(\log_a x)_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+3a},$$

ali se pokazuje da samo $1 - \sqrt{1+3a}$ zadovoljava uslove (1) i (4).

Za $0 < a < 1$ jednačina ima dva rješenja

$$x_1 = a^{-1+\sqrt{1-a}}, \quad x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$$

a za ostale vrijednosti a ona nema rješenja.

18.32. Jednačina je definisana uz uslove

(1) $$0 < x \neq 1, \ \log_x \sqrt{27} \geq -1.$$

Ustanoviti da rješenja, ako postoje, moraju zadovoljiti uslov $\log_3 x < 0$, tj.

(2) $$0 < x < 1.$$

Iz uslova (2) i iz drugog uslova (1) slijedi uslov $x \leq \frac{1}{\sqrt{27}}$.

Prema tome, rješenja, ako postoje, pripadaju intervalu

(3) $$\left(0, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$$

Iz date jednačine dobije se jednačina

$$\log_x^2 3 - \frac{3}{2}\log_x 3 - 1 = 0,$$

odakle se dobije da je $x = \frac{1}{9}$ ili $x = \sqrt{3}$. Vrijednost $x = \sqrt{3}$ ne pripada intervalu (3), pa otpada.

$$\mathscr{R} = \left\{\frac{1}{9}\right\}.$$

18.33.* Prilikom transformiranja date jednačine treba ustanoviti da je $\log_a x > 0$, pa je i $\log_a x + 1 > 0$, i da se jednačina može svesti na oblik

$$(1)\quad \frac{1}{2\sqrt{\log_a x}}\left[(\log_a x + 1) + |\log_a x - 1|\right] = a.$$

a) Ako je $\log_a x \geqslant 1$, iz (2) se dobije jednačina

$$\log_a x = a^2,$$

pa je

$$x = a^{(a^2)}.$$

1° Ako je $a > 1$, uslov $\log_a x \geqslant 1$ je ispunjen za $x = a^{(a^2)}$, jer imamo:

$$\log_a a^{(a^2)} \geqslant 1 \Leftrightarrow a^{(a^2)} \geqslant a,$$

a posljednja nejednakost je tačna.

2° Ako je $a < 1$, uslov $\log_a x \geqslant 1$ opet se svodi na tačnu nejednakost $a^{(a^2)} > a$.

b) Ako je $\log_a x < 1$, iz (1) se dobije jednačina

$$\log_a x = \frac{1}{a^2},$$

odakle je

$$(2)\qquad x = a^{\frac{1}{a^2}}.$$

Pokazuje se da x iz jednakosti (2) zadovoljava uslov $\log_a x < 1$ i za $0 < a < 1$ i za $a > 1$.

Rješenja jednačine su

$$x_1 = a^{(a^2)};\ x_2 = a^{a^{\frac{1}{2}}},\ 0 < a \neq 1.$$

18.34. Definiciono područje je $D = (0,2)\setminus\{1\}$, a uslov za parametar k je $k > 1$. Iz date jednačine dobijemo:

$$\log_x 10^{1-\log(\log k)} = \log_x \frac{10}{(2-x)x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log[(2-x)x] = \log(\log k) \Leftrightarrow x^2 - 2x + \log k = 0.$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \log k},\ k \leqslant 10.$$

Rezultat:

$$\text{za } 1 < k < 10 \text{ je } x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - \log k}.$$

18.35.* Prelazeći na dekadske logaritme, jednačina se može svesti na oblik

$$x^2 - 4x + \log n = 0,$$

uz uslove $0 < x < 4$, $x \neq 1$, $n > 1$.

Rezultat:

Za $1 < n < 10^4$, $n \neq 10^3$ je $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - \log n}$;
za $n = 10^3$ je $x = 3$;
za $n = 10^4$ je $x = 2$;
za $n > 10^4$ jednačina nema rješenja.

18.36. *Uputa*: uočiti da je

$$\log_a x \cdot \log_b a = \frac{\log_b x}{\log_b a} \cdot \log_b a = \log_b x,$$

pa, nakon prebacivanja svih članova na jednu stranu znaka $=$, izvući zajednički faktor $\log_b x$.

$$\mathscr{R} = \{1, 3a^2\}.$$

18.37. *Uputa*: Data se jednačina može napisati u obliku

$$(\log x - 1)(\log x - \log(x+2)) = 0.$$

$$\mathscr{R} = \{10\}.$$

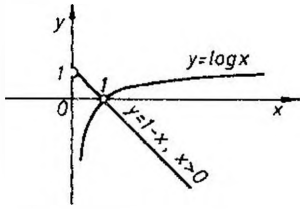
18.38. *Uputa*: $2\log_x 2 = \log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}$. Dobije se jednačina

$$\log_4 x + \log_4(10 - x) = 2.$$

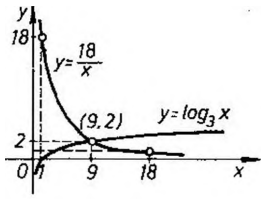
$$\mathscr{R} = \{2, 8\}.$$

18.39.* a) Uz pomoć grafika funkcija $y = \log x$ i $y = 1 - x$, $x > 0$ na slici 18.12, može se uočiti da je rješenje $x = 1$.

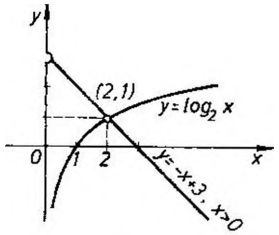
b) $x = 9$ (vidjeti sliku 18.13).



Sl. 18.12.



Sl. 18.13.



Sl. 18.14.

18.40.* Stavi li se $\log_2 x = y$, dobije se jednačina

$$y^2 - y + xy + 2x - 6 = 0,$$

odnosno

$$(y + 2)(y + x - 3) = 0,$$

pa je

$$x = \frac{1}{4} \vee \log_2 x = 3 - x.$$

Drugu jednačinu riješiti kao i u prethodnom zadatku, uz pomoć slike 18.14.

Rezultat je $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 2$.

18.41. a) $\mathscr{R} = \left\{\frac{1}{10}, 100\right\}$; b) $\mathscr{R} = \left\{\frac{1}{10^4}, 10\right\}$.

18.42. Kako je $6^{\log_6^2 x} = (6^{\log_6 x})^{\log_6 x} = x^{\log_6 x}$ (vidjeti formule 18.1'), dobije se

$$x^{\log_6 x} + x^{\log_6 x} = 12 \Leftrightarrow x^{\log_6 x} = 6 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \log_6^2 x = 1.$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left\{\frac{1}{6}, 6\right\}.$$

18.43. U skupu $D = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ iz date jednačine dobijemo:

$$x^{\frac{1}{2} \cdot 2\log_a(x^2 - 2)} = a^{\frac{\log_a 4}{2\log_a a}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x(x^2 - x) = \frac{2\log_x 2}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Rješenje $x_1 = -1$ posljednje jednačine ne pripada definicionom području D pa otpada, a rješenje date jednačine je $x = 2$.

18.44.* Definiciono područje jednačine je:

(1) za $k > 0$, $x > 0$,

(2) za $k < 0$ $-1 < x < 0$.

Uz uslove (1) i (2) data jednačina je ekvivalentna jednačini

(3) $x^2 + (2 - k)x + 1 = 0$.

a) Diskriminanta jednačine (3) je $D = 0$ za $k = 4$, jer slučaj $k = 0$ otpada. Tada jednačina (3), pa zato i data jednačina, ima dva jednaka rješenja $x_1 = x_2 = 1$.

b) Ako je $D > 0$, tj. ako je $k < 0 \vee k > 4$, tada iz (3) slijedi da je

$$x_{1,2} = -1 + \frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k(k-4)}.$$

1° Ako je $k < 0$, pokazati da x_1 ne zadovoljava uslov (2), a da ga x_2 zadovoljava. Znači, za $k < 0$ postoji tačno jedno rješenje.

2° Za $k > 4$ je $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$, tj. zadovoljen je uslov (1), pa tada imamo dva rješenja.

Rezultat: jednačina ima tačno jedno rješenje

$$x = \frac{1}{2}(k - 2 + \sqrt{k(k-4)}, \text{ za } k < 0.$$

18.45. Pokazuje se da je diskriminanta date jednačine (po nepoznatoj $\log_a x$) $D = 12$, pa postoje realna rješenja po nepoznatoj $\log_a x$:

$$(\log_a x)_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{3}}{\cos\alpha}.$$

Zaključiti da uz uslove zadatka za α i x mora biti $\frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{3}}{\cos\alpha} > 0$, odakle se dobije da je

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2};$$

i, istovremeno,

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2},$$

dakle,

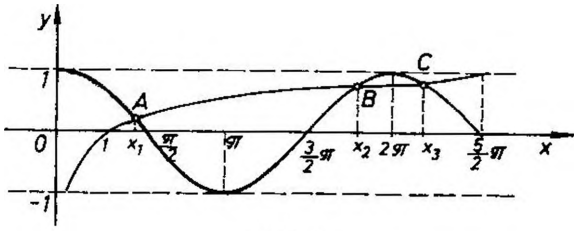
$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < \alpha < \frac{25}{3} + 2k\pi, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}.$$

18.46.* Jednačina je definisana za $x > 0$. Zaključiti da mora biti $-1 \leqslant \log_{\frac{5\pi}{2}} x \leqslant 1$, tj. $\frac{2}{5\pi} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$. Kako je $\cos\frac{5\pi}{2} = 0$, a $\log_{\frac{5\pi}{2}}\frac{5\pi}{2} = 1$, i kako je funkcija $y = \log_{\frac{5\pi}{2}} x$ rastuća funkcija, ukoliko rješenje jednačine postoji, ono mora biti manje od $\frac{5\pi}{2}$.

U intervalu $(0, \pi)$ $\log_{\frac{5\pi}{2}} x$ raste od $-\infty$ do $\log_{\frac{5\pi}{2}}\pi > 0$, a $\cos x$ opada od 1 do -1. Zato postoji tačno jedna vrijednost $x_1 \in (0, \pi)$ tako da je

$$\log_{\frac{5\pi}{2}} x_1 = \cos x_1,$$

tj. da je x_1 rješenje date jednačine (sl. 18.15).



Sl. 18.15.

Zaključiti, na isti način, da postoje još dva rješenja.
Rezultat:

$$x_1 \in (0, \pi), \ x_2 \in (\pi, 2\pi), \ x_3 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right).$$

18.47. $x = \sqrt[29]{16}$, $y = \sqrt[5]{16}$.

18.48. *Uputa*: uvesti smjenu $\log x = u$, $\log y = v$. *Rezultat*:

$$x_1 = 10,\ y_1 = \sqrt[4]{10};\ x_2 = \sqrt[4]{10},\ y_2 = 10.$$

18.49. Iz uslova $x + y > 0$ i $xy > 1$ (jer je $xy = 3$) slijede uslovi

$$x > 0,\ y > 0,\ x + y > 1^{1)}.$$

Zato dati sistem prima oblik

$$\log_2 (x + y) + |\log_2 (x - y)| = 3 \wedge xy = 3.$$

1° Ako je

(1) $$0 < x - y < 1,$$

tada je

$$x = 3\sqrt{\frac{3}{7}},\ y = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Ovaj par zadovoljava uslove (1), a i dati sistem.

2° Ako je

(2) $$x - y > 1,$$

dobije se da je

$$x = 3,\ y = 1,$$

što zadovoljava uslov (2), a i dati sistem.

$$\mathscr{R} = \left\{\left(3\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right),\ (3, 1)\right\}.$$

18.50. Uz uslove $x > 0$, $y > 0$ i $a \neq 0$, prva jednačina sistema ekvivalentna je jednačini

$$\log x + \log y = 2\log |a|.$$

Kvadrirati ovu jednačinu, itd.

$$\mathscr{R} = \{(|a|^{-1}, |a|^3), (|a|^3, |a|^{-1})\},\ a \neq 0.$$

18.51. *Uputa*: izvršiti transformaciju $\log_2 \frac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 (y + 1) - 1$, i uvesti smjenu $\log_2 x = u$, $\log_2 (y + 1) = v$.

$$\mathscr{R} = \{(\sqrt{2}, 15), (2, 3)\}.$$

18.52. Uz uslove $0 < x \neq 1$, $y > 0$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\log_2 xy = \log_2 a^2 \wedge \log_2 (x + y) = 3.$$

Rezultat:

$$x_1 = y_2 = 4 + \sqrt{16 - a^2},\ x_2 = y_1 = 4 - \sqrt{16 - a^2},$$
$$a \neq 0,\ a \neq \pm 1,\ |a| \neq \sqrt{7},\ |a| \leqslant 4.$$

18.53. $x = 64$, $y = \frac{1}{4}$.

18.54. Sistem je definisan uz uslove

(1) $$0 < x \neq 1,\ y > 0,\ x > 3y.$$

Ako se prvi logaritam u prvoj jednačini svede na bazu x, a ako se druga jednačina logaritmira po bazi x, dobije se sistem

$$x - 3y = 4 \wedge 2\log_x^2 y - 5\log_x y + 2 = 0.$$

Ovaj se sistem može zamijeniti skupom od ova dva sistema:

$$(x - 3y = 4 \wedge y = x^2) \vee (x - 3y = 4 \wedge y^2 = x).$$

Rješenje sistema je par

$$x = 16,\ y = 4.$$

[1)] Naime, $y > \frac{1}{x}$, pa je $x + y > x + \frac{1}{x} > 1$ (jer je $\frac{x^2 - x + 1}{x} > 0$ za $x > 0$).

18.55. a) *Uputa*: logaritmovati drugu jednačinu sistema po bazi 10. Dobije se sistem u kome se može smatrati da su y i $\log x$ nove promjenljive.

$$x_1 = 0{,}1,\ y_1 = 2;\ x_2 = 100,\ y_2 = -1.$$

b) $$x_1 = 8,\ y_1 = 10;\ x_2 = 1000,\ y_2 = 2.$$

18.56. Sistem je definisan uz uslove $x \neq 0$, $y \neq 0$, a ekvivalentan je sistemu

$$\log|y| \cdot \log|x| = \log 4,$$
$$\log|x| + \log|y| = \log 40 = 1 + \log 4.$$
$$\mathscr{R} = \{(10, 4), (4, 10), (-10, -4), (-4, -10)\}.$$

18.57. *Uputa*: svesti sve logaritme, na primjer, na bazu a. Rješenja su:

$$x = y = 1, \text{ za } 0 < a \neq 1,\ 0 < b \neq 1;$$
$$x = \log_a b,\ y = \frac{1}{\log_a b}, \text{ za } a > 1,\ b > 1, \text{ ili za } 0 < a < 1,\ 0 < b < 1.$$

18.58.* Ako se iz druge jednačine sistema izrazi y i uvrsti u prvu jednačinu, dobije se jednačina

$$20\, x^{-\log_3 x + \frac{8}{3}} + 7x^{-\log_3 x} \cdot 3^{\frac{8}{3}\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3}.$$

Kako je $3^{\frac{8}{3}\log_3 x} = \left(3^{\log_3 x}\right)^{\frac{8}{3}} = x^{\frac{8}{3}}$ (formule 18.1'), iz posljednje jednačine može se dobiti jednačina

$$x^{\frac{8}{3} - \log_3 x} = 3^{\frac{4}{3}},$$

a logaritmiranjem ove jednačine po bazi 3 dobije se da je

$$x_1 = 3^{\frac{2}{3}},\ x_2 = 9.$$

Za y se dobije

$$y_1 = 9,\ y_2 = 3^{\frac{2}{3}}.$$

18.59. *Uputa*: uvesti smjenu $\log_2 x = u$, $\log_3 y = v$, $\log_5 z = w$. Dobije se da je $x = 16$, $y = 3$, $z = 5$.

18.4. LOGARITAMSKE NEJEDNAČINE

18.60. $$\log\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 0 \Leftrightarrow \left(\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < 1 \wedge x \neq 1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[(x-1)^2 < (2x+1)^2 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -\frac{1}{2}\right].$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

18.61. *Uputa*: voditi računa o formulama 18.4. i 18.5.

Tako je data nejednačina u oblasti u kojoj je $0 < 2x + 3 < 1$, tj. u oblasti $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$, ekvivalentna nejednačini $x^2 > 2x + 3$.

$$\mathscr{R} = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 3) \setminus \{0\}.$$

18.62. Definiciono područje $D = (1, +\infty)$ nejednačine određuje se iz uslova

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \wedge \log_3 \frac{x+1}{x-1} > 0 \wedge \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1} > 0.$$

Svesti logaritme na osnove 2 i 3, pa uvesti smjenu $\log_3 \frac{x+1}{x-1} = y$ $(y > 0)$, nakon čega se dobije nejednačina

$$\mathscr{R} = (2, +\infty).$$

18.63. Ako se pređe na bazu 3, i ako se stavi da je $\log_3 x = y$, dobije se nejednačina

$$\frac{y^2 - 4}{y(y+1)(y+4)} > 0.$$

$$\mathscr{R} = \left(\frac{1}{81}, \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup (9, +\infty).$$

18.64. Definiciono područje $D = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ određuje se iz uslova

$$x + 1 \neq 0,\ 0 < 1 - x^2 \neq 1,\ 0 < 2x - 1 \neq 1,\ 1 - 2x \neq 0.$$

Pošto je u skupu D $|1 - 2x| = |2x - 1| = 2x - 1$ i $x + 1 > 0$, dobije se nejednačina

$$\log_{1-x^2}(x+1) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

U skupu D je $0 < 1 - x^2 < 1$, pa je nejednačina (1) ekvivalentna nejednačini

$$x + 1 \geqslant \sqrt{1 - x^2}.$$

Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

18.65. Definiciona oblast nejednačine je

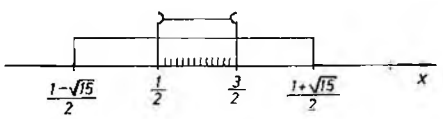
$$D = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right).$$

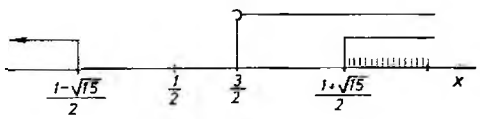
Pošto je, u skupu D, $2x - 1 > 0$, to je $2x - 1 = |2x - 1| = |1 - 2x|$. Zato je $\log_{|1-2x|}(2x-1) = 1$, pa je data nejednačina u skupu D ekvivalentna skupu od ova dva sistema nejednačina:

$$0 < x - \frac{1}{2} < 1, \qquad x - \frac{1}{2} > 1,$$

$$2x + 3 - x^2 \geqslant x - \frac{1}{2}; \qquad x + 3 - x^2 \leqslant x - \frac{1}{2}.$$

Skup rješenja prvog sistema je $\mathscr{R}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, a skup rješenja drugog sistema je





$\mathscr{R}_2 = \left[\frac{1+\sqrt{15}}{2}, +\infty\right)$. Uzevši u obzir domenu D, dobijemo ovaj skup rješenja:

$$\mathscr{R} = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{15}}{2}, 3\right).$$

18.66. Data nejednačina se svodi na uslov $3 < |\log_a x| < 4$, a rješenja su:

$$\frac{1}{a^3} < x < \frac{1}{a^4} \vee a^4 < x < a^3, \text{ za } 0 < a < 1;$$

$$\frac{1}{a^4} < x < \frac{1}{a^3} \vee a^3 < x < a^4, \text{ za } a > 1.$$

18.67. U području $-1 < x < 1$, nejednačina se svodi na oblik

$$\log_a(1-x) > 2$$

(vidjeti primjer 18.2). Rezultat je

$$x \in (1-a^2,\ 1), \qquad \text{za } 0 < a < 1;$$
$$x \in (-1,\ 1-a^2), \qquad \text{za } 1 < a < \sqrt{2}.$$

18.68. Nejednačina je definisana uz uslove $\left(0 < x \leqslant \frac{\sqrt{5}}{5}\right) \vee x > 1$.

Ako rješenja postoje, ona moraju zadovoljavati uslov $-\sqrt{6} \cdot \log_x \sqrt{5} > 0$, odnosno uslov $\log_x \sqrt{5} < 0$, odakle slijedi da je $0 < x < 1$. Zato datu nejednačinu rješavamo u području u kome je $0 < x \leqslant \frac{\sqrt{5}}{5}$, i ona je u tome području ekvivalentna nejednačini

$$\log_x^2 5 - \log_x 5 - 2 > 0.$$

$$\mathscr{R} = \left(\frac{1}{5},\ \frac{\sqrt{5}}{5}\right].$$

18.69. Definiciono područje je $D = (4,\ +\infty)$. Uvesti smjenu $\sqrt{2^{\sqrt{x}}} = y$.

$$\mathscr{R} = (4,\ 36).$$

18.70. U skupu $D = (0,\ +\infty)$ data je nejednačina ekvivalentna nejednačini

$$\log_2(2^x - 1)(1 + \log_2(2^x - 1)) < 2,$$

u koju treba uvesti smjenu $\log_2(2^x - 1) = y$.

Rezultat:

$$\log_2 5 - 2 < x < \log_2 3.$$

18.71.* *Uputa*: svesti nejednačinu na oblik

$$x^{\log_x^2 x + \log_x x^2 + 3} < x,$$

pa je rješavati posebno u oblastima u kojima je $x = 1$, odnosno $0 < x < 1$, odnosno $x > 1$. Rješenja su:

$$x \in (0,\ 1) \cup (a^{-1},\ a^{-2}), \text{ ako je } 0 < a < 1;$$
$$x \in (0,\ a^{-2}) \cup (a^{-1},\ 1), \text{ ako je } a > 1.$$

18.72. Definiciono područje određeno je uslovom $|x + 1 + 2i| > 2$, odakle slijedi $x \neq -1$.

$$\mathscr{R} = (-3,\ -1) \cup (-1,\ 1).$$

18.73.* Definiciono područje je $D = [-a,\ 2\sqrt{a} + 1)$, a rješenja su

$$x \in \left[\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2},\ 2\sqrt{a} + 1\right), \text{ za } 0 < a < 1;$$

$$x \in \left[-a,\ \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right), \text{ za } a > 1.$$

18.74. Prvi član konjunkcije u domeni $D = (0,\ \pi)$ prima oblik $\log_{\frac{3}{4}} \sin x \geqslant \frac{1}{2}$. Skup rješenja je

$$\mathscr{R} = \left(0,\ \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi,\ 3\right).$$

18.75. Zadatak se rješava uz uslov da je $x \in (1,\ +\infty)$. Staviti $\log_{\frac{1}{2}} x = y$, pa formulu svesti na ekvivalentnu formulu

$$y^2 + 2\cos\alpha \cdot y + 1 \leqslant 0.$$

Rezultat:

$$\alpha = 2k\pi\ (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),\ x = 2.$$

18.76. Data nejednačina ekvivalentna je uslovima

$$0 < |z|^2 - |z| + 1 < 6 + 3|z|.$$

Prva je nejednakost tačna za sve kompleksne brojeve $z \in C$, a druga se nejednakost svodi na uslov $|z| < 5$.

Traženi dio ravni je unutarnja oblast kružnice kojoj odgovara jednačina $x^2 + y^2 = 25$, središta u koordinatnom početku i radijusa $r = 5$.

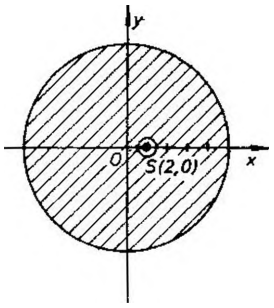
18.77. Data nejednačina je ekvivalentna nejednačini

$$\frac{|z-2|+2}{4|z-2|-2} > \frac{1}{3},$$

odakle se dobije $\frac{1}{2} < |z-2| < 8$, odnosno

$$\frac{1}{4} < (x-2)^2 + y^2 < 64.$$

Traženi dio ravni je kružni prsten (bez periferije) što ga čine kružnice središta u tački $S(2, 0)$ i radijusa $\frac{1}{2}$, odnosno 8 (sl. 18.16).



Sl. 18.16.

19. POLINOMI. RACIONALNA RJEŠENJA ALGEBARSKIH JEDNAČINA. RACIONALNE FUNKCIJE

19.1. POLINOMI

19.1. *Dokaz.* $P(x) = (x^2 - 2x)^2 - 4x^2 + 12x^2 - 24x + 24 =$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 8(x^2 - 3x + 3) =$$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 8\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3\right] =$$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 8\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right].$$

Pošto je, očito, $P(x) > 0$, to je $P(x) = |P(x)|$ za sve $x \in R$.

19.2. Polinom $P(x)$ je četvrtog stepena i zato bi mogao biti jedino kvadrat polinoma $mx^2 + nx + p$ drugog stepena, tj.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1 = (mx^2 + nx + p)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2mp)x^2 + 2npx + p^2,$$

odakle slijedi (po teoremi 19.2) da je

$$m = \pm 1,\ p = \pm 1,\ 2mn = a,\ n^2 + 2mp = b,\ 2np = -8.$$

Dobije se $a_1 = -8$, $b_1 = 18$; $a_2 = 8$, $b_2 = 14$.

19.3. *Rješenje.* Za $x = 10$ dobijemo jednakost

$$1 = (10 + b)(10 + c),$$

i pošto su $10 + b$ i $10 + c$ cijeli brojevi, to je $10 + b = 10 + c = 1$, ili $10 + b = 10 + c = -1$. Odatle slijedi da je $b = c = -9$ ili $b = c = -11$, pa je

$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x - 9)^2 \text{ ili}$$
$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x - 11)^2.$$

Za $x = 0$ imamo:
$10a + 1 = 81$, $b = c = -9$ ili $10a + 1 = 121$, $b = c = -11$, odakle slijedi $a = 8$, $b = c = -9$ ili $a = 12$, $b = c = -11$.

19.4. a) Pošto je $f(x) = x^2 + px + q$, to je

$$f[f(x)] = (x^2 + px + q)^2 + p(x^2 + px + q) + q, \text{ itd.}$$

Dobije se $p = -1$, $q = -2$, $A = 5$, $B = 4$.

b) Pošto je $f(x) = x^2 - x - 2$, to je

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 - f(x) - 2 = [f(x) + 1] \cdot [f(x) - 2].$$

Zato imamo:

$$F(x) < 0 \Leftrightarrow [f(x) + 1] \cdot [f(x) - 2] < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 - x - 4) < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right).$$

19.5. Polinom d zove se najveći zajednički djelilac (u oznaci NZD) ili najveća zajednička mjera polinoma P, $Q \neq 0$, ako $d(z) \mid P(z)$ i $d(z) \mid Q(z)$ (tj. ako je $d(z)$ zajednički djelitelj polinoma $P(z)$ i $Q(z)$) i ako je svaki zajednički djelilac $R(z)$ polinoma $P(z)$ i $Q(z)$ također djelilac i polinoma $d(z)$).

Za svaka dva od nule različita polinoma P, Q postoji NZD. On je jedinstven sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante.[1]

U dokazu ovog stava, kao i u praktičnom nalaženju NZD, primjenjuje se tzv. Euklidov[2] algoritam (koji je isti kao i kod nalaženja NZD cijelih brojeva).

Da bi se uprostio Euklidov algoritam, možemo u toku računa množiti proizvoljnim numeričkim faktorima ($\neq 0$) bilo djelilac, bilo djeljenik ili djelimični djeljenik (jer je NZD dat sa tačnošću do jedne multiplikativne konstante).

a) $2P(z) : Q(z) = z + \frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{2}(z^2 + 10z + 9)}{Q(z)}$, tj. $R_1(z) = -\frac{1}{2}(z^2 + 10z + 9)$;

$Q(z) : (-2R_1(z)) = 2z - 19 + \frac{R_2(z)}{-2R_1(z)}$, gdje je $R_2(z) = 172(z + 1)$:

$-2R_1(z) : (z + 1) = z + 9$ (bez ostatka),

tj.

$d(z) = z + 1$ (NZD od P i Q).

b) $d(x) = x + 3$ (NZM (P, Q)).

19.6. Prema napomeni 19.1.b) imamo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})(x - x_n) =$$
$$= a_n x^n - a_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) x^{n-1} + a_n(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n) x^{n-2} -$$
$$- a_n(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n) x^{n-3} + \ldots + (-1)^n a_n x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$

Ova jednakost je identitet, pa su, prema teoremi 19.2, odgovarajući koeficijenti jednaki, odakle slijede Vietove formule.

19.7. Poći od Vietovih formula u zadatku 19.6, i prvu od tih formula kvadrirati, itd.

Dobije se jednakost

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2p.$$

19.8. *Prvo rješenje.* Prema formulama Vieta (vidjeti zadatak 19.6) imamo:

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = 0,$

(2) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p,$

(3) $x_1 x_2 x_3 = -q.$

Kvadriranjem jednakosti (1) dobijemo:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 0,$

odakle, zbog (2) slijedi

(4) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2p = 0.$$

Prema jednakosti (3) je $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$ (jer je $q \neq 0$), pa iz (4) slijedi da je $p < 0$.

Drugo rješenje. Kada bi dati polinom imao sve tri nule jednake, na primjer jednake a, tada bi bilo

$$f(x) = (x - a)(x - a)(x - a) = (x - a)^3,$$

što, očito, nije. Znači, polinom ima bar dvije nule različite. Neka su te nule x_1 i x_2, i neka je $x_1 < x_2$. Tada bi bilo $x_1^3 < x_2^3$. Kada bi bilo $p \geqslant 0$, tada bi bilo $px_1 \leqslant px_2$, pa bi bilo:

$$f(x_1) = x_1^3 + px_1 + q < x_2^3 + px_2 + q.$$

Pošto je $f(x_2) = 0$, slijedilo bi da je $f(x_1) < 0$, tj. nije $f(x_1) = 0$, pa x_1 ne bi bila nula.

Dakle je $p < 0$.

19.9. $$q(x) = 2x^3 + 3x^2 + 8x + 22, \quad r = 43,$$

(vidjeti primjer 19.2).

---

[1] Neki autori u definiciji NZD dvaju polinoma P, Q zahtijevaju da je to normiran polinom $M(P, Q)$, tj. da mu je najstariji koeficijent jednak 1. U tom slučaju je NZD jedinstven.

[2] Euklid (365?– 300?) pr. n. e., Aleksandrija) — starogrčki matematičar.

19.10. Prema teoremi 19.3. postoji količnik $q(x)$ i ostatak $r(x)$, tako da je

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x),$$

pri čemu je $r(x)$ nula-polinom ili polinom najviše prvog stepena (jer je $g(x)$ drugog stepena). Znači da je $r(x) = ax + b$, pa imamo:

$$x^{99} + x^3 + 10x + 5 = (x^2 + 1)q(x) + ax + b.$$

Za $x = i$ je $x^2 + 1 = 0$, pa imamo:

$$i^{99} + i^3 + 10i + 5 = ai + b,$$
$$8i + 5 = ai + b,$$
$$a = 8,\ b = 5.$$

Ostatak je $8x + b$.

19.11. Označimo li datu kvadratnu jednačinu sa $F(x, y) = 0$, datu linearnu jednačinu sa $f(x, y) = 0$, a jednačinu druge prave sa $g(x, y) = ax + by + c = 0$, koeficijente A, C, E, a, b i c određujemo iz identične jednakosti polinoma

$$F(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y).$$

Rezultat: $a = 4,\ b = -3,\ c = 2;$
$A = 4,\ C = -15,\ E = 13.$

19.12. *Rješenje.* Ako sa k označimo dvostruko rješenje date jednačine, tada je polinom $z^5 - 5z + a$ djeljiv sa $(z - k)(z - k) = z^2 - 2kz + k^2$. Znači, ostatak pri tom dijeljenju

$$r(z) = 5(k^4 - 1)z - 4k^5 + a$$

je identički, tj. za svaki z, jednak 0. To je, međutim, moguće samo ako je

$$k^4 - 1 = 0 \quad \text{i} \quad -4k^5 + a = 0.$$

Iz prve jednačine slijedi da je $k_{1,2} = \pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$, pa jednačina ima dva jednaka rješenja ako je $a = \pm 4$ ili $a = \pm 4i$.

19.13. Primijeniti Vietove formule (za polinom četvrtog stepena) ili primijetiti da je

$$P_4(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)^2 = (z - 5)(z + 2)(z - 3)^2.$$

Rezultat:

$$P_4(z) = z^4 - 9z^3 + 17z^2 + 33z - 90.$$

19.14. *Rješenje.* Pomoću Hornerove sheme možemo polinom

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

razviti po stepenima osnove $z - z_0$, tj. predstaviti ga u obliku polinoma

$$P_n(z) = A_n(z - z_0)^n + A_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + \ldots + A_1(z - z_0) + A_0,$$

gdje su $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0$ koeficijenti koje treba odrediti. Vidimo da je A_0 ostatak pri diobi polinoma $P_n(z)$ sa $z - z_0$. Ako je količnik pri ovoj diobi polinom $P_{n-1}(z)$, onda pri njegovoj diobi sa $z - z_0$ dobijemo količnik $P_{n-2}(z)$ i ostatak A_1 itd.

U našem slučaju, Hornerova shema daje:

$z_0 = 1$	1	−2	3	−4	2	5
	1	−1	2	−2	0	5
	1	0	2	0	0	
	1	1	3	3		
	1	2	5			
	1	3				

Prema tome,

$$z^5 - 2z^4 + 3z^3 - 4z^2 + 2z + 5 = (z - 1)^5 + 3(z - 1)^4 + 5(z - 1)^3 + 3(z - 1)^2 + 5.$$

Primijeniti i neki drugi metod u rješavanju ovog zadatka!

19.15. Polazeći od identiteta

$$z^4 + az^3 + bz^2 - 8z + 4 = (z^2 + pz + q)^2,$$

ili prema Vietovim pravilima (za $z_{1,2} = \alpha$, $z_{3,4} = \beta$), dobije se

$$p_1 = -2,\ q_1 = 2,\ z_{1,2} = 1 + i,\ z_{3,4} = 1 - i,$$

odnosno $p_2 = 2,\ q_2 = -2,\ z_{1,2} = -1 + \sqrt{3},\ z_{3,4} = -1 - \sqrt{3}.$

19.16. Primjenom Hornerove sheme (ili neposrednim uvrštavanjem), dobije se da su 2 i 3 (3 dvostruka) nule od P:

2	1	−8	22	−26	21	−18
3	1	−6	10	−6	9	0
3	1	−3	1	−3	0	
	1	0	1	0		

Dakle, imamo:

a) $P(z) = (z-2)(z-3)^2(z^2+1)$ (u R),

b) $P(z) = (z-2)(z-3)^2(z-i)(z+i)$ (u C).

19.17.

	1	$1+2i$	0	$-(1+3i)$	0	7
$z_0 = -2-i$	1	$-1+i$	$3-i$	$-8-4i$	$12+16i$	$-1-44i = P(z_0)$

19.18. Prema Hornerovoj shemi, imamo:

	1	a	b	c
1	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b+c+1$
−2	1	$a-2$	$b-2a+4$	$c-2b+4a-8$
4	1	$a+4$	$4a+b+16$	$16a+4b+c+64$

Iz uslova zadatka slijedi

$a+b+c+1=0$, $4a-2b+c-8=0$, $16a+4b+c+64=18$, odakle je $a=-2$, $b=-5$, $c=6$.

19.19. Pošto je

$$f(x) = (x-1)\cdot q(x),$$

gdje je $q(x) = nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$,

a $g(x) = (x-1)^2$,

treba $q(x)$ da bude djeljiv sa $x-1$. Dalje, na polinom $q(x)$ primijeniti teoremu 19.5.

19.20. *Prvo rješenje.* Pitanje se svodi na to da li postoji polinom $q(x)$ tako da vrijedi jednakost

$$f(x) = g(x)\cdot q(x).$$

Polinom $q(x)$ treba da je drugog stepena, tj. oblika mx^2+nx+p. Pošto je, očito, $m=6$, imamo

$$6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2 = (x^2 - x + b)(6x^2 + nx + p).$$

Nakon sređivanja i izjednačavanja odgovarajućih koeficijenata dobije se:

$a=-7$, $b=-1$, $n=-1$, $p=-2$;

odnosno $a=-12$, $b=-2$, $n=-1$, $p=-1$.

Drugo rješenje.

Dijeleći polinom $f(x)$ sa $g(x)$, dobije se ostatak

$$r(x) = (a-5b+2)x + 6b^2 - ab + b + 2,$$

i pošto treba da je $r(x)=0$ za svaki x, slijedi

$$a-5b+2=0 \wedge 6b^2-2b+b+2=0,$$

itd.

19.21. Primjenom Bezuove teoreme 19.4. pri dijeljenju $f(x)$ sa $x-2$ i sa $x-3$ dobijemo da je

$$f(2)=5. \quad f(3)=7.$$

Iz jednakosti

$$f(x)=(x-2)(x-3)\cdot q(x)+ax+b$$

(jer je, prema teoremi 19.3. ostatak $r(x)$ nula ili polinom najviše prvog stepena, pošto je $(x-2)(x-3)$ polinom drugog stepena) slijedi

$$f(2)=2a+b=5.$$
$$f(3)=3a+b=7.$$

Ostatak je $2x+1$.

19.22.* U jednakosti

$$f(x)=(x^4+x^2+1)\cdot q(x)+r(x)$$

tražimo ostatak $r(x)$, a to je nula ili polinom najvišeg trećeg stepena. Pošto je

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2,$$

posljednju jednakost možemo pisati ovako:

$$f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\cdot q(x)+r(x),$$

odnosno

$$f(x)-r(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\cdot q(x).$$

Vidimo da je $f(x)-r(x)$ djeljivo sa x^2+x+1 i sa x^2-x+1, odakle slijedi da pri dijeljenju $f(x)$ sa x^2+x+1, odnosno sa x^2-x+1 dobijemo iste ostatke kao pri dijeljenju $r(x)$ s njima. Zato je

$$r(x)=(x^2+x+1)(ax+b)+(1-x),$$
$$r(x)=(x^2-x+1)(cx+d)+(3x+5).$$

Naime, $r(x)$ ima stepen 3, pa pri dijeljenju polinomom stepena 2 dobijemo količnik $ax+b$, odnosno $cx+d$ najvišeg prvog stepena.

Ako izjednačimo desne strane dvije posljednje jednakosti, i primijenimo teoremu 19.2, dobićemo, na kraju,

$$r(x)=-2x^3+2x^2+x+5.$$

19.23. Količnik mora biti kvadratni trinom oblika x^2+ax+b, pa iz identičke jednakosti

$$x^4+1=(x^2+px+q)(x^2+ax+b),$$

na osnovu teoreme 19.2, dobijemo sistem

$$a+p=0,$$
$$b+ap+q=0,$$
$$aq+bp=0,$$
$$bq=1.$$

iz koga slijedi sistem

$$q-p^2+\frac{1}{q}=0 \wedge p\left(q-\frac{1}{q}\right)=0.$$

Ako je u drugoj jednačini $p=0$, tada prva jednačina nema rješenja. Ako je $q-\frac{1}{q}=0$, tj. $q=\pm 1$, tada prva jednačina ima rješenje $p=\pm\sqrt{2}$ samo za $q=1$.

Imamo, dakle:

$p_1=-\sqrt{2}$, $q_1=1$ (tada je $a_1=-\sqrt{2}$, $b_1=1$);

$p_2=\sqrt{2}$, $q_2=1$ (tada je $a_2=-\sqrt{2}$, $b_2=1$).

Lako je uočiti da je

$$x^4+1=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

19.24. *Rješenje.* Pri djeljenju se dobije količnik

$$q(x)=x^2+bx+a+b^2,$$

i ostatak

$$r=b^3+ab+1.$$

Prema uslovima zadatka treba da je:

(1) $b^3 + ab + 1 = 0$,

(2) $x^2 + bx + a + b^2 > 0$ za sve $x \in R$.

Ovaj sistem ekvivalentan je sistemu

$$a = -\frac{1+b^3}{b} \text{ (jer je, prema (1), } b \neq 0),$$

$3b^2 + 4a > 0$ (jer u (2) mora biti $D < 0$).

Iz ovog sistema slijedi formula

(3) $$3b^2 - 4\frac{1+b^3}{b} > 0.$$

1° Za $b > 0$ slijedi nemoguća formula $-b^3 > 4$.

2° Ako je $b < 0$ iz (3) slijedi $b > -\sqrt[3]{4}$.

Rezultat:

$$-\sqrt[3]{4} < b < 0,\ a = -\frac{b^3+1}{b}.$$

19.25. *Rješenje.* 1° Za $n = 2$ je $f(x) = x^2 - 1$, i taj polinom nije djeljiv sa $(x-1)^2$.

2° Za $n > 2$ imamo:

$$f(x) = (x^n - 1) - ax(x^{n-2} - 1)$$

$$f(x) = (x-1)[x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 - ax(x^{n-3} + x^{n-4} + \ldots + x + 1)].$$

Da bi polinom $f(x)$ bio djeljiv sa $(x-1)^2$, potrebno je i dovoljno da je polinom $g(x)$ u srednjoj zagradi djeljiv sa $x - 1$, a za to je potrebno i dovoljno da je $g(1) = 0$ (vidi teoremu 19.5). Zato imamo:

$$g(1) = n - a(n-2) = 0.$$

$$a = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

19.26. Pošto su imaginarni brojevi i, $-i$ nule datog polinoma za neparne n, on je djeljiv sa $x + i$ i sa $x - i$, pa je djeljiv i sa $x^2 + 1$. Za parne brojeve n to nije ispunjeno.

19.27. *Prvi način.* Dokaz se može izvesti pomoću matematičke indukcije. Za prelaz od n na $n+1$ treba izračunati $P_{n+1} - P_n$.

Drugi način. Prvi član količnika Q je

$$Q_1 = x^{n-1}\cos(n-1)t,$$

a prvi djelimični ostatak može se napisati u obliku

$$R_1 = x^n\cos(n-2)t - x^{n-1}\cos(n-1)t - x\cos t + 1$$

(primjenjujući formulu $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$). Uočimo li da je $R_1 = P_{n-1}$, tada je

$$P_n = x^{n-1}\cos(n-1)t \cdot A + P_{n-1}.$$

Pošto je posljednja formula rekurentna (P_n je izraženo pomoću P_{n-1}) i pošto $A \mid x^{n-1}\cos(n-1)\cdot A$, polinom P_n biće djeljiv sa A ako $A \mid P_1$. Kako je, međutim, $P_1 = A$, to $A \mid P_n$.

Članovi količnika Q su:

$Q_1 = x^{n-1}\cos(n-1)t$, $Q_2 = x^{n-2}\cos(n-2)t$ itd., pa na kraju imamo:

$Q = x^{n-1}\cos(n-1)t + x^{n-2}\cos(n-2)t + \ldots + x\cos t + 1$

19.28.* Pošto su nule polinoma $x^2 + x + 1$ $x_{1,2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, treba odrediti n tako da to budu nule i datog polinoma (teorema 19.5). Znači, treba riješiti jednačine

(1) $$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n - 1 = 0.$$

Uočimo da su brojevi $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ rješenja jednačina $x^3 + 1 = 0$, $x^3 - 1 = 0$, što znači da je

(2) $$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1, \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1.$$

Zato je korisno posmatrati slučajeve kada je $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$.

1° Ako je $n = 3k$, tada prema (1) i (2) imamo:

$$\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{3k} - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{3k} - 1 = (-1)^k - 1^k - 1 \neq 0.$$

2° Ako je $n = 3k + 1$, imamo:

$$(-1)^k \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) - 1 \begin{cases} = 0, & \text{za } k = 2m, \\ \neq 0, & \text{za } k = 2m + 1. \end{cases}$$

3° Ako je $n = 3k + 2$, imamo:

$$(-1)^k \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 - 1 =$$

$$= (-1)^k \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) - \left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) - 1 \begin{cases} = 0, & \text{za } k = 2m + 1, \\ \neq 0, & \text{za } k = 2m. \end{cases}$$

Rezultat: dati polinom djeljiv je sa $x^2 + x + 1$ ako je:

$$n = 6m + 1 \text{ ili } n = 6m + 5, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

19.29. Postoji stav: „Ako je α imaginarna nula reda k realnog polinoma $P(x)$, takođe je i α njegova nula istog reda". Zato iz svojstva da je $x_1 = 1 + i$ korijen date jednačine slijedi da je i $x_2 = 1 - i$ njen korijen. Zato je polinom u datoj jednačini djeljiv polinomom $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - 2x + 2$, pa iz jednakosti $(x^3 - 5x^2 + 8x - 6) : (x^2 - 2x + 2) = x - 3$ izlazi da je $x_3 = 3$ treći korijen date jednačine.

19.30. *Dokaz*. Neka je

$$P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0),$$
$$Q_m(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0),$$

gdje su koeficijenti $a_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ i $b_j (j = 0, 1, \ldots, m)$ iz R (odnosno iz C). Tada za $x \in R$ (odnosno za $x \in C$) svojstva sabiranja i množenja na R (odnosno na C) povlače

$$(P_n \cdot Q_m)(x) = P_n(x)\, Q_m(x) = a_n x^n Q_m(x) + \ldots + a_1 x Q_m(x) + a_0 Q_m(x) = \ldots =$$
$$= a_n b_m x^{n+m} + \ldots + (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k) x^k +$$
$$+ \ldots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0.$$

Kako su koeficijenti proizvoda $P_n \cdot Q_m$ iz R (odnosno iz C), to je $P_n \cdot Q_m$ polinom definisan na R (odnosno na C).

Nadalje, možemo pretpostaviti bez umanjenja opštosti, da je $m \leqslant n$ i u slučaju $m < n$ stavimo $b_{m+1} = \ldots = b_n = 0$. Tada je $Q_m(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$, pa, za sve $x \in R$ (odnosno $x \in C$), imamo:

$$(P_n + Q_m)(x) = P_n(x) + Q_m(x) = (a_n + b_n) x^n + \ldots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0),$$

pri čemu su koeficijenti zbira $P_n + Q_m$ iz R (odnosno iz C). To pokazuje da je $P_n + Q_m$ polinom definisan na R (odnosno na C).

Prema tome, vrijedi

$$(\forall P_n, Q_m)\,(P_n, Q_m \in \mathscr{P}) \;\Rightarrow\; (P_n + Q_m, P_n \cdot Q_m \in \mathscr{P}),$$

tj.

$(\mathscr{P}, +)$ i $(\mathscr{P}, \cdot)$ su grupoidi.

Očigledno je nula-polinom 0 neutralni element za operaciju sabiranja polinoma, pa se lako provjeri da je $(\mathscr{P}, +, \cdot)$ prsten čija je jedinica polinom $P(x) = 1\,(\forall x \in R)$ (odnosno $\forall x \in C$).

19.31. Prema Newtonovoj binomnoj formuli je:

$$(1 + x^2 - x^3)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} (x^2 - x^3)^k = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} x^{2k} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (-x)^m =$$
$$= \sum_{k=0}^{9} \sum_{m=0}^{k} \binom{9}{k} \binom{k}{m} (-1)^m x^{m+2k}.$$

Kako je jednakost $m + 2k = 8$ $(m = 0, 1, \ldots k;\; k = 0, 1, \ldots, 9)$ ekvivalentna sa $(m = 0 \wedge k = 4) \vee (m = 2 \wedge k = 3)$, to je traženi koeficijent

$$\binom{9}{4}\binom{4}{0}(-1)^0 + \binom{9}{3}\binom{3}{2}(-1)^2 = 378.$$

19.32.* Prema binomnoj formuli je:

$$(1 + x^2 + x^5)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{100-5k} \left(\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{2m} \right) = \sum_{k=0}^{20} \sum_{m=0}^{k} \binom{20}{k} \binom{k}{m} x^{100-5k+2m}.$$

Odatle se vidi da je u prikazu $(1 + x^2 + x^5)^{20} = \sum_{n=0}^{100} a_n x^n$ koeficijent $a_n \neq 0$, ako i samo ako je $n = 100 - 5k + 2m$ za neki par (k, m) za koji je $0 \leqslant m \leqslant k \leqslant 20$. Dokažimo da od brojeva $1 \leqslant n \leqslant 100$ ovaj uslov ne ispunjavaju brojevi $n = 1, 3, 93, 96, 98, 99$.

Stvarno, neka je, za dati prirodni broj $n (1 \leqslant n \leqslant 100)$, k najmanji prirodan broj za koji je $100 - 5k \leqslant n$. Ako je $k = 0$, tada je $n = 100 = 100 - 5 \cdot 0 + 0$.

Ako je $k = 1$, tada $95 \leqslant n < 100$. Za $n = 95$, odnosno $n = 97$ vrijedi $n = 100 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0$, odnosno $n = 100 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1$. Brojevi 96, 98 i 99 ne mogu se napisati u obliku $100 - 5k' + 2m' (0 \leqslant m' \leqslant k')$ ni za neko $k' > 1$, jer $100 - 5k' + 2m' \leqslant 100 - 3k' \leqslant 94$.

Neka je sada $k = 2$. Tada je $90 \leqslant n < 95$ i od tih brojeva oblik $100 - 5k + 2m (0 \leqslant m \leqslant k = 2)$ imaju sigurno brojevi 90, 92, 94. Kako je $91 = 100 - 15 + 6 = 100 - 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3$, ostaje još samo broj 93. Kako je $93 > 100 - 3k' \geqslant 100 - 5k' + 2m' (0 \leqslant m' \leqslant k')$ za $k' > 2$, broj 93 nema oblik $100 - 5k + 2m$ $(0 \leqslant m \leqslant k \leqslant 20)$.

Za $2 < k < 20$ imamo:

(1) $\quad n = 100 - 5k + 2m \quad (0 \leqslant m \leqslant k)$

ili

(2) $\quad n = 100 - 5k + 2m' + 1 \quad (0 \leqslant m' < k)$.

Stvarno, ne može biti $n \geqslant 100 - 5k + 5$, jer bi inače bilo $100 - 5(k - 1) \leqslant n$, pa $2m' + 1 < 5$, tj. $m' < 2 < k$.

U slučaju (2), za $m'' = m' + 2$ vrijedi

(3) $\quad n = 100 - 5(k + 1) + 2m'' \quad (0 \leqslant m'' < k + 1)$.

Znači za $2 < k < 20$ vrijedi (1) ili (3), tj. n ima traženi oblik.

Konačno za $k = 20$ imamo

$$0 \leqslant n < 5$$

pa za $n = 1$ i $n = 3$ nemamo oblik

$$n = 100 - 5 \cdot 20 + 2m \ (0 \leqslant m \leqslant 20).$$

Dakle, broj koeficijenata različitih od nule je $101 - 6 = 95$.

19.33.* Npr., $h(x) = x - 2, \quad f(x) = x^3, \quad g(x) = x^2$,

jer je

$$[h \circ (f + g)](x) = h[(f + g)(x)] = h[f(x) + g(x)] = h(x^3 + x^2) = x^3 + x^2 - 2,$$

a $[(h \circ f) + (h \circ g)](x) = (h \circ f)(x) + (h \circ g)(x) = h(f(x)) + h(g(x)) = x^3 - 2 + x^2 - 2$.

19.34.* Primijetimo da je traženi zbir jednak vrijednosti datog polinoma u tački $x = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kako je dati polinom jednak $(x^{1948} + x^{1985} + 2)^{2050}$, a ovaj jednak 1 za navedenu vrijednost od x (jer je $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$), to zaključujemo da je traženi zbir jednak 1.

19.2. RACIONALNA RJEŠENJA ALGEBARSKIH JEDNAČINA

19.35. Odgovor je negativan (vidjeti posljedice 1. i 2. teoreme 19.6).

19.36. $x_1 = 2, x_2 = -3$.

19.37. *Rješenje.* Ako jednačina ima racionalnih rješenja, ta su rješenja cijeli brojevi, i to su faktori ± 1 broja 1 (teorema 19.6). Zato imamo:

$$f(-1) = -1 + p + 1 = 0 \Rightarrow p = 0;$$
$$f(1) = 1 - p + 1 = 0 \Rightarrow p = 2.$$

Znači, jednačina ima racionalna rješenja ($x = -1$, odnosno $x = 1$) za vrijednosti $p = 0$, odnosno $p = 2$.

19.38. Ako polinom $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ima racionalnih nula, one su cijeli brojevi (posljedica 2. teoreme 19.6), i treba ih potražiti među brojevima $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Pošto je $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, nule polinoma $f(x)$ su 1, 2 i 3, pa je

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) > 0.$$

$$\mathscr{R} = (1, 2) \cup (3, +\infty).$$

19.39. $x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{23}\,i}{2}$.

19.40. Dobije se da je $a = -1$, $b = 6$. Podijeliti sada polinom sa $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$, itd.

$$\mathscr{R} = (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty).$$

19.41. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0.$$

Ako ova jednačina ima racionalnih rješenja, ona su cijela, i to su faktori broja 9, tj. $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

Rješenja su $x_1 = 1,\ x_{2,3} = 3$.

19.42. Lako je uočiti da je $x_1 = -1$ jedno rješenje date jednačine. Kada polinom na lijevoj strani jednačine podijelimo sa $x + 1$, dobijemo jednačinu

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Ovo je simetrična jednačina, pa se rješava kao jednačina u zadatku 15.11.a).

19.43. Ako jednačina ima racionalnih rješenja p/q (p i q relativno prosti), tada je $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$, $q \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Provjerom (direktnim uvrštavanjem ili primjenom Hornerove sheme) se ustanovi da je jedini racionalni korijen date jednačine $z = \dfrac{3}{10}$. Za ovaj slučaj Hornerova shema je

$\frac{3}{10}$	30	-9	-10	3	-40	12
	30	0	-10	0	-40	0 $(= r)$

Napomenimo da se ovdje moglo raditi prema napomeni 19.3.

19.44. *Rješenje. Prvi način.* Ako postoje racionalne nule $\dfrac{p}{q}$ treba ih, prema teoremi 19.6, potražiti među brojevima

$$\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}.$$

Pošto je $f(1) = 0$ i $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$, brojevi $x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{1}{3}$ su nule polinoma $f(x)$.

Prema teoremi 19.5. polinom $f(x)$ je djeljiv sa $x - 1$ i sa $x + \dfrac{1}{3}$, odnosno proizvodom

$$g(x) = (x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right);$$

količnik toga dijeljenja je

$$q(x) = 3x^2 + 6x - 6.$$

Nule polinoma $q(x)$ su $-1 \pm \sqrt{3}$ (koje nisu racionalne).

Nule polinoma $f(x)$ su, dakle:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad x_3 = -1 - \sqrt{3}, \quad x_4 = -1 + \sqrt{3}.$$

Drugi način. Ako, shodno napomeni 19.3, u jednačinu $f(x) = 0$ uvedemo nepoznatu y smjenom $x = \dfrac{y}{3}$, dobijemo jednačinu $y^4 + 4y^3 - 33y^2 + 18y + 54 = 0$.

Sada, na osnovu posljedica 1. i 2. teoreme 19.6, treba provjeriti sve djelioce koeficijenta $b_0 = 54$, itd.

19.45. *Prvi način.* Polinom na lijevoj strani jednačine rastaviti na faktore (izlučiti zajednički faktor x, pa umjesto $5x^2$ staviti $6x^2 - x^2$).

Drugi način. Na polinom $g(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$ primijeniti teoremu 19.6. i teoremu 19.5. Korijeni su:

$$-3,\ 0,\ 2,\ i,\ -i.$$

19.46. *Rješenje.* 1° Jedini parni prosti broj je 2, a za $n = 2$ jednačina $x^2 + x + 2 = 0$ nema realnih, pa zato ni racionalnih rješenja.

2° Neka je n neparan prost broj. Pošto je koeficijent člana x^n jednak 1, ako jednačina ima racionalnih rješenja, ona su cijeli brojevi (posljedica 2. teoreme 19.6), i to su faktori $\pm 1,\ \pm n$ broja n.

Stavimo li

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + n,$$

tada imamo:

$$f(1) = n + n = 2n \neq 0,$$
$$f(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots + 1 - 1 + n = n - 1 \neq 0,$$
$$f(n) = n^n + n^{n-1} + \ldots + n + n \neq 0,$$
$$f(-n) = -n^2(n^{n-2} - n^{n-3} + n^{n-4} - \ldots + n - 1) \neq 0.$$

Kada bi, naime, izraz u zagradi bio jednak 0, tada bismo imali

$$n^{n-2} - n^{n-3} + n^{n-4} - \ldots + n = 1.$$

Ova jednakost, međutim, nije tačna, jer je lijeva strana djeljiva sa n, a desna nije.

Prema tome, nijedan od brojeva $\pm 1,\ \pm n$ nije rješenje date jednačine, pa ona nema racionalnih rješenja.

19.47. Pošto je $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $x_1^3 = (3 + 2\sqrt{2})\cdot(1 + \sqrt{2}) = 7 + 5\sqrt{2}$, $x_1^4 = x_1^3 \cdot x_1 = 17 + 12\sqrt{2}$, $x_1^5 = x_1^4 \cdot x_1 = 41 + 29\sqrt{2}$, data jednačina, nakon uvrštavanja pređe u jednakost

$$(7a + 3b + 48) + (5a + 2b + 34)\sqrt{2} = 0.$$

Pošto su a i b racionalni brojevi, prvi je sabirak racionalan, a drugi iracionalan (ako $5a + 2b + 34 \neq 0$), pa je gornja jednakost tačna ako i samo ako je

$$7a + 3b + 48 = 0 \wedge 5a + 2b + 34 = 0.$$

Rješenje ovog sistema je $a = -6$, $b = -2$, pa jednačina glasi:

$$x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 5x + 2 = 0.$$

Pošto je $f(\pm 1) = 0$ i $f(-2) = 0$, rješenja su

$$x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -2.$$

Polinom $x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x - 2$ djeljiv je polinom

$$(x + 1)(x - 1)(x + 2)$$

trećeg stepena, a količnik je polinom drugog stepena čija je jedna nula $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, a druga je onda jednaka $1 - \sqrt{2}$.

Prema tome, rješenja date jednačine su:

$$x_1 = 1 + \sqrt{2},\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -2,\ x_5 = 1 - \sqrt{2}.$$

19.3. RACIONALNE FUNKCIJE

19.48. Imamo:

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = A(x^2 - 4) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x - 2 = (A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A \Rightarrow (A + B + C = 1 \wedge 2B - 2C = -4 \wedge -4A = -2).$$

Rješavanjem ovog sistema dobijemo

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{4}, \quad C = \frac{5}{4}.$$

Dakle, traženo razlaganje je

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+2}.$$

19.49. Važi

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(4x^2-4x-15)} \equiv \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} \equiv \frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+3}+\frac{C}{2x-5},$$

gdje je $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{3}{4}$.

19.50. Poslije množenja sa $x(2x-1)^2$, identitet

$$\frac{x^2-x+1}{x(2x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{(2x-1)^2},$$

postaje

$$x^2-x+1=A(2x-1)^2+Bx(2x-1)+Cx,$$

odakle se za $x=0$ dobije $A=1$, za $x=\frac{1}{2}$ slijedi $C=\frac{3}{2}$, dok za $x=1$ proizlazi $1=A+B+C$, što, zajedno sa nađenim vrijednostima $A=1$, $C=\frac{3}{2}$, daje $B=-\frac{3}{2}$.

Dakle, traženo razlaganje je

$$\frac{x^2-x+1}{x(2x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{3/2}{2x-1}+\frac{3/2}{(2x-1)^2}.$$

19.51. Iz identiteta

$$\frac{1}{(a+bx)(1+x^2)}=\frac{A}{a+bx}+\frac{Bx+C}{1+x^2},$$

(koji je definisan za $a+bx\neq 0$) slijedi

$$1\equiv(A+bB)x^2+(aB+bC)x+(A+aC),$$

odakle se dobije sistem jednačina $A+bB=0$, $aB+bC=0$, $A+aC=1$, čije je rješenje $A=b^2/(a^2+b^2)$, $B=-b/(a^2+b^2)$, $C=a/(a^2+b^2)$.

19.52. $\dfrac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}\equiv\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2x+2}$,

$$x^2-5x+9\equiv A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)(x-1)^2;$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\Rightarrow 5=5B\Rightarrow B=1,\\ x=0\Rightarrow -2A+D=7\\ x=-1\Rightarrow -A-2C+2D=7\\ x=2\Rightarrow 10A+2C+D=-7 \end{array}\right\}=\left(A=-\frac{7}{5},\quad C=\frac{7}{5},\quad D=\frac{21}{5}\right).$$

19.53. Vrijedi razvoj

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

gdje je

$$A=C=\frac{1}{4},\ B=-\frac{1}{4},\ D=\frac{1}{2},\ E=-\frac{1}{2}.$$

19.54. $\dfrac{x^3+2x-1}{x^4-5x^2+4}=\dfrac{x^3+2x-1}{(x^2-1)(x^2-4)}=\dfrac{x^3+2x-1}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2},$$

gdje je

$$A=-\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{4},\quad C=\frac{11}{12},\quad D=\frac{13}{12}.$$

19.55. Kako je

$$\frac{1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}=\frac{1}{(x^2+1)^2+2x(x^2+1)}=\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)},$$ to se dobije

$$\frac{1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}.$$

19.56. Faktorizacija polinoma $x^5 - 1$ može se dobiti nalaženjem rješenja binomne jednačine $x^5 - 1 = 0$ (tj. petih korijena iz 1) u trigonometrijskom obliku, tj. u obliku

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{5} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right).$$

No, faktorizaciju polinoma $x^5 - 1$ možemo dobiti i na ovaj način:

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x-1)x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1\right) =$$

$$= \left|x + \frac{1}{x} = t, x \neq 0\right| = (x-1)x^2(t^2 + t - 1) = (x-1)x^2(t - t_1)(t - t_2) =$$

$$= (x-1)x^2\left(x + \frac{1}{x} - t_1\right)\left(x + \frac{1}{x} - t_2\right) = (x-1)(x^2 - t_1 x + 1)\cdot(x^2 - t_2 x + 1),$$

gdje su

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ nule polinoma } t^2 + t - 1.$$

Sada je

$$\frac{1}{x^5 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - t_1 x + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 - t_2 x + 1},$$

itd.

19.57. Iz $1 + x^{2n} = 0$ slijedi $x = \sqrt[2n]{-1}$, tj.

$x_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2n}$, $(k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, pa je

$$1 + x^{2n} = \prod_{k=0}^{k=n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{2n}\pi + 1\right).$$

Prema tome, vrijedi razvoj

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{M_k x + N_k}{x^2 - 2x\cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi + 1},$$

pri čemu su M_k, N_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ konstante koje treba odrediti.

19.58. $f(x) = x^5 - 1 - \dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} =$

$$= \ldots = x^5 - 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{1-x+x^2}.$$

20. ARITMETIČKI NIZ. GEOMETRIJSKI NIZ I RED. NEKE SUME

20.1. ARITMETIČKI NIZ

20.1. Iz definicije aritmetičkog niza slijedi da je

$$(25 - x) - (x + 5) = (30 + 2x) - (25 - x),$$

odakle slijedi da je $x = 3$.

20.2. Ako sa a_{k-p} i a_{k+p} označimo članove niza koji su „simetrični" prema članu a_k, $k \in N \setminus \{1\}$, $p = 1, 2, \ldots, k-1$, tvrdi se da je jednakost

$$\frac{a_{k-p} + a_{k+p}}{2} = a_k \quad (p = 1, 2, \ldots, k-1;\ k = 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

potreban i dovoljan uslov da bi niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ bio aritmetički.

a) Neka je tačna jednakost (1). Iz nje, za $p = 1$ slijedi da je $a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$ $(= d)$, i kako ovo vrijedi za svaki $k \in N \setminus \{1\}$, niz je aritmetički. Uslov (1) je, dakle, dovoljan da bi niz bio aritmetički.

b) Pretpostaviti sada da je niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ aritmetički, pa dokazati da vrijedi uslov (1) (primijeniti formulu 20.1).

20.3. Uočiti da je

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}[2a_1 + (1-1)d],$$

$$S_2 = 2a_1 + d = \frac{2}{2}[2a_1 + (2-1)d], \text{ itd.}$$

Dokaz izvesti pomoću matematičke indukcije, ili sabirajući ove dvije jednakosti:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1.$$

20.4. Pretpostavimo da takav broj a postoji i neka su njegove cifre x, y i z. Kada bi te cifre činile aritmetički niz, tada bi bilo: $y = x + d$, $z = x + 2d$, pa bi zbir cifara broja a bio

$$3x + 3d = 3(x + d).$$

Zašto broj $a = \overline{xyz}$ ne može biti prost?

20.5. $A = \dfrac{n(n+1)}{2} \log a.$

20.6. Svesti logaritme na lijevoj strani jednakosti na bazu b.

20.7. a) Za paran broj n imamo

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - n^2 =$$
$$= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \ldots + [(n-1) - n][(n-1) + n] =$$
$$= -1 \cdot [3 + 7 + 11 + \ldots + (2n-1)].$$

Broj $k = \dfrac{n}{2}$ članova aritmetičkog niza u srednjoj zagradi nađe se po formuli 20.1, pa za zbir imamo

$$S = -\frac{n}{2}(n+1).$$

b) Za neparan broj n imamo:

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (n-2)^2 - (n-1)^2 + n^2 = \ldots =$$
$$= -1 \cdot [3 + 7 + 11 + \ldots + (2n-3)] + n^2,$$
$$S = \frac{n}{2}(n+1).$$

U oba slučaja se zbir može napisati u obliku

$$S = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{2}(n+1).$$

20.8. Radeći slično kao u prethodnom zadatku, dobije se da je

$$S = -d \cdot \frac{2k}{2}(a_1 + a_{2k}).$$

Odavde se, eliminacijom diferencije d, dobije posmatrana jednakost.

20.9. Prema zadatku 20.2, brojevi $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}$ i $\frac{1}{a+b}$ čine aritmetički niz, ako i samo ako vrijedi jednakost

$$2 \cdot \frac{1}{a+c} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b},$$

a ona se može svesti na ekvivalentnu jednakost $2b^2 = a^2 + c^2$. Posljednja jednakost je tačna, ako i samo ako brojevi a^2, b^2 i c^2 čine aritmetički niz. Time je dokaz završen.

20.10. U izrazu $\log(2^x - 1)$ mora biti $x > 0$. Posmatrani izrazi čine aritmetički niz ako je $x = \frac{\log 5}{\log 2}$ (ili $x = \log_2 5$).

20.11. Za cifre a, $b = a + d$ i $c = a + 2d$ moraju biti ispunjeni ovi uslovi:

$$a + 2d = 0 \text{ ili } a + 2d = 5.$$
$$a + (a+d) + (a+2d) = 9 \text{ ili } 18 \text{ ili } 27.$$

Ispitivanjem svih mogućih slučajeva zaključuje se da uslove zadatka zadovoljavaju brojevi

630, 135 i 765.

20.12. Za svaki $n \in N \setminus \{1\}$ vrijedi:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 - 5n) - [(n-1)^2 - 5(n-1)] = 2(n-3).$$

Zato je, za svaki $n > 1$

$$a_n - a_{n-1} = 2(n-3) - 2(n-4) = 2,$$

pa je posmatrani niz aritmetički. Pri tome je

$$a_1 = S_1 = 1 - 5 = -4, \; d = 2.$$

Niz glasi:

$$-4, -2, 0, 2, \ldots$$

20.13. Treba naći za koje vrijednosti m i n je $a_m = b_n$. Ova se jednakost svodi na jednakost $n = 3 \cdot \frac{m+1}{4}$ i pošto $n \in N$, mora biti $m + 1 = 4k$, tj. $m = 4k - 1$, $n = 3k$ ($k = 1, 2, \ldots, 250$, jer je $4k = m + 1 \leqslant 1001$). Na taj se način dobiju parovi (m, n): (3, 3), (7, 6), (11, 9), ... (999, 750).

Nizovi imaju 250 jednakih članova.

20.14. Primjenom teoreme o rastavljanju polinoma (napomena 19.1) i teoreme o identički jednakim polinomima (teorema 19.2), iz jednakosti

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

dobiju se sljedeće, takozvane Vietove formule:[1]

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3), \; b = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \; c = -x_1 x_2 x_3.$$

Iz njih (pod uslovom da je x_1, x_2, x_3 aritmetički niz) dobijemo:

1° za $a = 0$ (dokazati da je tada i $c = 0$) nizove

$$\mp\sqrt{-b}, \; 0, \; \pm\sqrt{-b},$$

uz uslov $b \leqslant 0$;

[1] Vidi o tim formulama općenito u zadatku 19.6.

2° za $a \neq 0$ nizove

$$-\frac{a}{3} \mp \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{3c}{a}}, \quad -\frac{a}{3}, \quad -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{3c}{a}},$$

uz uslov da je $\frac{a^2}{9} \geqslant \frac{3c}{a}$ i $b = \frac{a^2}{9} + \frac{3c}{a}$.

20.15. *Prvi način.* Primijeniti matematičku indukciju (počev od $n = 2$) i staviti $a_{k+1} = a_k + d$, $a_1 = a_k - (k-1)d$.

Drugi način. Uočiti da je $\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}\right) \cdot \frac{1}{d} = \frac{a_{i+1} - a_i}{a_i a_{i+1}} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{a_i a_{i+1}}$, pa je

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{d} - \frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n} \cdot \frac{1}{d} = \ldots = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

20.16.* Ako je broj k rješenje bikvadratne jednačine, tada je i broj $-k$ njeno rješenje. Prema tome, da bi bikvadratna jednačina imala 4 realna rješenja, moraju bar dva rješenja biti negativna.

1° Ako su x_1 i x_2 rješenja tako da je $0 < x_1 < x_2$, tada su i $-x_1$ i $-x_2$ rješenja, pri čemu je

$$-x_2 < -x_1 < x_1 < x_2.$$

Pošto su rješenja susjedni članovi aritmetičkog niza, to je $x_2 - x_1 = x_1 - (-x_1) = 2x_1$, pa je

$$x_2 = 3x_1.$$

Odavde i iz Vietovih formula (vidjeti zadatak 20.14) dobijemo sisteme jednačina

$$3m + 5 = 10x_1^2, \quad m + 1 = 3x_1^2 \quad \text{i} \quad 3m + 5 = 10x_1^2, \quad m + 1 = -3x_1^2.$$

Iz ovih sistema dobijemo:

za $m = 5$ rješenja jednačine $-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3\sqrt{2}$,

a za $m = -\frac{25}{19}$ rješenja $-3\sqrt{\frac{2}{19}}, -\sqrt{\frac{2}{19}}, \sqrt{\frac{2}{19}}, 3\sqrt{\frac{2}{19}}$.

2° Slučajevi $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ i $x_1 = x_2 \neq 0$ otpadaju. Zašto?

3° Slučaj $x_1 = x_2 = 0$ ne nastupa (jer sistem $3m + 5 = 0 \wedge m + 1 = 0$ nema rješenja).

20.2. GEOMETRIJSKI NIZ

20.17. Vidjeti uputu za zadatak 20.2. Dobije se da je

$$a_k^2 = a_{k-p} \cdot a_{k+p}.$$

20.18. Iz uslova da koeficijenti a, b i c čine geometrijski niz, slijedi da je $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, tj. da je $b^2 = ac$. Uvjeriti se da ovo implicira da su rješenja jednačine realna i jednaka.

20.19. U vezi sa drugim uslovom zadatka pogodno je članove niza označiti sa $\frac{a_2}{q}$, a_2, $a_2 q$, pa se dobije da je $a_2 = 10$. Zadatak ima dva rješenja — brojeve

50, 10, 2, odnosno 2, 10, 50.

20.20. Prema formuli 20.5. imamo jednačinu

$$111\,111 = 1 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1},$$

odakle slijedi da je $n = 6$.

20.21. Iz $n-1$ jednakost oblika

$$f(k) = f(k-1) + a^k,\ k = 2, 3, \ldots, n,$$

sabiranjem se dobije jednakost

$$f(n) = f(1) + a^2 + a^3 + \ldots + a^n.$$

Odatle se, za $a \neq 1$ dobije da je $f(n) = 1 + a^2 \cdot \dfrac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$, a za $a = 1, f(n) = n$.

20.22. a) Kako je $x \neq 1$, to je

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^{m+1} - 1}{x^{n+1} - 1} = \frac{(x^{n+1})^{\frac{m+1}{n+1}} - 1}{x^{n+1} - 1}.$$

Iz posljednjeg izraza je vidljivo ovo: da bi polinom $P(x)$ bio djeljiv sa $Q(x)$, dovoljno je da je $\dfrac{m+1}{n+1}$ prirodan broj, tj. da je $m+1$ djeljivo sa $n+1$.

20.23. Zadatak se svodi na pitanje za koje vrijednost $n \in N$ je izraz

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} : \frac{x^n - 1}{x - 1}, \text{ tj. } \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

polinom varijable x. Primijeniti Bezuovu teoremu iz 19.1. i zaključiti da je potrebno i dovoljno da je n neparan broj.

20.24. Na osnovu formula (20.6) i (20.7) imamo sistem jednačina $a + c = 2b \wedge a^2 c^2 = b^4$, odakle slijedi jednačina

(1) $$a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|.$$

Jasno je da brojevi a, b i c moraju biti različiti od 0 (jer se ne bi moglo govoriti o geometrijskom nizu).

1° Ako je $ac > 0$, iz jednačine (1) slijedi da je $a = c$, tj. $a^2 = c^2$, pa za količnik q imamo:

$$q^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1, \text{ odnosno } q = 1.$$

2° Ako je $ac < 0$, iz jednačine (1) (nakon njenog dijeljenja sa a^2) dobijemo

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 6\frac{c}{a} + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8}\ (< 0).$$

Znači, $q^2 = \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = (3 \pm \sqrt{8})^2$, tj. $q = 3 \pm 2\sqrt{2}$ (jer je $q > 0$).

Rezultat:

$$q_1 = 1,\ q_{2,3} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

20.25. Pošto je

$$a = 1 \cdot \frac{2^{5n} - 1}{2 - 1} = \ldots = (32)^n - 1,$$

vidi se da je a djeljivo sa $32 - 1 = 31$.

20.26. Ako srednji broj y označimo sa $3 + d$, tada imamo ova dva niza:

$3, 3 + d, x$ — aritmetički niz.
$3, -3 + d, x,$ — geometrijski niz.

Rezultat: $x_1 = 3,\ x_2 = 27.$

20.27. $\underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{888\ldots}_{n-1}89 = \underbrace{444\ldots4}_{n}\underbrace{888\ldots}_{n}88 + 1 = 4 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n} + 1$. Kako je

$$\underbrace{111\ldots1}_{n} = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9},$$

to je

$$444\ldots889 = \frac{4}{9}(10^n - 1)\cdot 10^n + \frac{8}{9}(10^n - 1) + 1 = \left(\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Sada treba posmatrati zbir cifara broja $2\cdot 10^n + 1$ i zaključiti da je $\frac{2\cdot 10^n + 1}{3} \in N$.

20.28. Pokazati da se dati izraz može napisati u obliku

$$\left(\frac{10^{n+1} + 2}{3}\right)^2,$$

pa dalje zaključivati kao u prethodnom zadatku.

20.29. $a = \frac{10^{2n} - 1}{9} - 2\cdot\frac{10^n - 1}{9} = \frac{(10^n - 1)^2}{9}$.

$$a = \left(\frac{10^n - 1}{3}\right)^2 = \left(\frac{\overbrace{999\ldots9}^{n\text{ cifara}}}{3}\right)^2 = \underbrace{333\ldots3}_{n\text{ cifara}}{}^2.$$

Traženi broj b je

$$b = \sqrt{a} = \underbrace{333\ldots3}_{n\text{cifara}}.$$

20.30. Prvo dokazati da je $a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$ (vidjeti primjer 20.1).
20.1). Treba imati na umu da je $2^{-2\log_2 y} = 2^{\log_2 y^{-2}} = y^{-2}$.
Rezultat:

$$x = \frac{1}{2}\log_2 5,\ y = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}.$$

20.31. 1° Za $a = 1$ je $x \geqslant 15$.

2° Za $0 < a < 1$, lijeva strana nejednačine se svodi na izraz $\frac{a^{x+1} - 1}{a - 1}$, pa se opet dobije da je $x \geqslant 15$.

3° Isti se rezultat dobije za $a > 1$.

Rezultat: za sve vrijednosti $a > 0$ je $x \geqslant 15$, $x \in N$.

20.32. Traženi brojevi su 2, 4, 8, 12$\frac{1}{2}$ odnosno $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}$.

20.33. *Prvi način*. 1° Za $n = 2k$, $k \in N$ imamo:

$$S = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2k) =$$
$$= \frac{k}{2}[1 + (2k - 1)] - \frac{k}{2}(2 + 2k) = -k = -\frac{n}{2}.$$

2° Za $n = 2k + 1$, $k \in N \cup \{0\}$ imamo:

$$S = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1)] - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2k) = \frac{n+1}{2}.$$

Drugi način. 1° Za $n = 2k$ imamo:

$$S = (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + [(2k - 1) - 2k] = k\cdot(-1) = -k = -\frac{n}{2}.$$

2° Za $n = 2k + 1$ imamo:

$$S = (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + [(2k - 1) - 2k] + 2k + 1 =$$
$$= k\cdot(-1) + 2k + 1 = k + 1 = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

20.34. Iz jednakosti $x_2 = x_1 q$, $x_3 = x_1 q^2$, prema Vietovim formulama (vidjeti zadatak 20.14), imamo:

$$x_1 + x_1 q + x_1 q^2 = -a,$$
$$x_1\cdot x_1 q + x_1\cdot x_1 q^2 + x_1 q\cdot x_1 q^2 = b,$$
$$x_1\cdot x_1 q\cdot x_1 q^2 = -c.$$

Iz prve jednačine slijedi da je $x_1(1 + q + q^2) = -a$, a onda iz druge $b = x_1^2 q(1 + q + q^2) = x_1 q(-a)$, itd.

Tražena veza između koeficijenata a, b i c je $b^3 = a^3 c$.

Kako je $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, to je $c \neq 0$. Ako je q realno, tada je $1 + q + q^2 > 0$, pa iz jednakosti $x_1(1 + q + q^2) = -a$ slijedi da je i $a \neq 0$, pa, prema tome, također, $b \neq 0$.

20.35. 1° Za $x \neq 1$ možemo pisati

$$S = x \cdot \frac{1-x}{1-x} + x^2 \cdot \frac{1-x^2}{1-x} + x^3 \cdot \frac{1-x^3}{1-x} + \ldots + x^n \cdot \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Sada treba izdvojiti zajednički faktor $\frac{1}{1-x}$, itd. Dobije se

$$S = \frac{x(1-x^n)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2(1+x)}.$$

2° Za $x = 1$ je $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

20.36.* Označimo li, kod oba niza, prve članove sa a, a druge sa b, tada za aritmetički niz imamo

$$a_n = a + (n-1)d = a + (n-1)(b-a),$$

a za geometrijski niz

$$b_n = a \cdot q^{n-1} = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}.$$

Zadatak se svodi na dokazivanje tačnosti formule

$$(\forall\, n \in N)\left[a + (n-1)(b-a) \leqslant a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right].$$

Ova je formula ekvivalentna sljedećim formulama:

$$a\left\{\left(\frac{b}{a} - 1\right)(n-1) - \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} - 1\right]\right\} \leqslant 0,$$

$$(1)\quad a\left(\frac{b}{a} - 1\right)\left\{(n-1) - \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right) + 1\right]\right\} \leqslant 0.$$

1° Ako je $\frac{b}{a} = 1$, tj. $a = b$, u formuli (1) vrijedi znak $=$, što je neposredno jasno.

2° Ako je $\frac{b}{a} > 1$, tada je $\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + \left(\frac{b}{a}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right) + 1\right\} > (n-1) \cdot 1 = n - 1$, a pošto je $a > 0$, u formuli (1) vrijedi znak $<$.

3° Slično se zaključuje ako je $\frac{b}{a} < 1$.

20.3. BESKONAČNI KONVERGENTNI GEOMETRIJSKI RED

20.37. Kako je $q = \frac{1}{4}$, red je konvergentan, pa, prema formuli 20.8, imamo

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sin^2 2\alpha}{3}.$$

20.38. $0,\dot{2}\dot{1} = 0,212121\ldots = \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6} + \ldots$

Imamo beskonačni geometrijski red količnika $q = \frac{1}{10^2}$, pa je taj red konvergentan. Pokazati da je

$$0,\dot{2}\dot{1} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Drugi način rješavanja ovoga zadatka vidjeti u zadatku 9.2.

20.39. $0,1\dot{2} = 0,1 + 0,0\dot{2} = 0,1 + 0,0222\ldots = 0,1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \ldots = \ldots$

Dobije se da je $0,1\dot{2} = \frac{11}{90}$, a ovo je racionalan broj.

20.40. a) Kako je $S = 2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right)$, na zbir u zagradi se može primijeniti formula 20.8, pa se na kraju dobije da je

$$S = 1.$$

b) $S = \frac{5}{2}$.

20.41. Iz uslova $\frac{a_1}{1-q} = 2a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ slijedi da je $q^n = \frac{1}{2}$.

Dobije se da je $\prod_{i=1}^{n} a_1 \cdot q^{i-1} = \sqrt{2} \cdot (q^n)^{\frac{n-1}{2}} = \ldots = (\sqrt{2})^{2-n}$.

20.42. Lijeva strana date jednačine predstavlja geometrijski red koji je konvergentan ako je $\sin x \neq \pm 1$, tj. ako je $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in Z)$. Rješenja jednačine su

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

20.43. Iz formule 20.5. slijedi jednačina $\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ koja nema rješenja, a iz formule 20.8. slijedi tačna numerička jednakost $\frac{6}{1 - \frac{1}{3}} = 9$, što znači da niz ima beskonačno mnogo članova.

20.44. Ako je a stranica šestougla i ako normale označimo sa n_1, n_2, itd. (nacrtati sliku), tada imamo:

$$n_1 = a\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ n_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4},\ n_3 = \frac{a\sqrt{3}}{8},\ \text{itd.}$$

Dužine normala čine beskonačni konvergentni geometrijski red količnika $q = \frac{1}{2}$. Za traženi omjer se dobije:

$$S_1 : S = 2\sqrt{3}.$$

20.45. Ako je P_Δ oznaka površine datog trougla, P_1 površina prvog kruga, a $3P_2$, $3P_3$, itd. površine po tri sljedeća kruga, treba, prvo, utvrditi da je u jednakosti

$$P = P_\Delta - [P_1 + 3(P_2 + P_3 + \ldots)]$$

izraz u maloj zagradi beskonačni konvergentni geometrijski red.

Rezultat:

$$P = \frac{a^2}{96}(24\sqrt{3} - 11\pi).$$

20.46.* Izraz je definisan ako je

(1) $$x < 0 \vee x > \frac{4}{7},\ x \neq \frac{2 \pm \sqrt{11}}{7}.$$

Broj n sabiraka u jednačini $1 + 7 + 13 + \ldots + y = 280$ i rješenje y te jednačine mogu se naći iz sistema formula 20.1. i 20.2, pa se dobije da je

$$n = 10,\ y = 55.$$

Dalje se dobije da je

(2) $$(0, \dot{y}; y) = \left(\frac{5}{9}, 55\right).$$

Iz (1) i (2) slijedi da je

$$x \in \left(\frac{4}{7}, 55\right),\ x \neq \frac{2 + \sqrt{11}}{7},$$

a kako je $x \in N$, na kraju imamo da je

$$x \in \{1, 2, 3, \ldots, 54\}.$$

20.47.* Posmatrani su izrazi definisani ako je

(1) $x \geqslant \sqrt[4]{a}$ za $0 < a < 1$,

(2) $0 < x \leqslant \sqrt[4]{a}$ za $a > 1$.

a) Kako članovi ne mogu biti jednaki 0, treba da je

(3) $b \neq 0$ i $x \neq 1$.

Iz uslova $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$ slijedi da je

$$x = a^{\frac{4}{b^2}}.$$

Ova vrijednost zadovoljava uslov $x \neq 1$, a uslovi (1) i (2) zadovoljeni su ako je $|b| \geqslant 4$.

Znači, za $0 < a \neq 1$, $|b| \geqslant 4$ i $x = a^{\frac{4}{b^2}}$, imamo 3 uzastopna člana geometrijskog niza.

b) Ovdje je odgovor negativan, jer je uslov $|q| = \left|\frac{a_3}{a_2}\right| < 1$ ekvivalentan nejednačini $|b| - 4 < -\sqrt{b^2 - 16}$, koja nema rješenja ako je $|b| \geqslant 4$.

20.4. NEKE SUME

20.48. Označimo li lijevu stranu posmatrane jednakosti sa A, tada imamo:

$$A = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

$$A = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

20.49. Dokaz se može izvesti pomoću matematičke indukcije.

20.50. Broj $11\ldots1$ sa k cifara koje su jedinice može se pisati u obliku

$$10^0 + 10^1 + 10^2 + \ldots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{9},$$

pa imamo:

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ puta}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k - 1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 10^k - \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n} 1 = \ldots = \frac{1}{81}(10^{n+1} - 9n - 10).$$

20.51. *Uputa*: svesti posmatrani razlomak na oblik $\frac{1}{d}(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})$. Za posmatrani zbir se dobije izraz

$$\frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

20.52. Podimo od identički tačne jednakosti

$$(x+1)^3 = x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Stavljajući u tu jednakost vrijednosti $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, dobijemo redom:

$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$,

$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$,

.....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3\cdot(n-1)^2 + 3\cdot(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1.$$

Saberemo li sve ove jednakosti dobijemo:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\cdot[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2] + 3\cdot[1 + 2 + \ldots + (n-1) + n] + n,$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n,$$

odakle se dobije da je traženi zbir

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

20.53. Ako se poslužimo identitetom

$$(x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

radeći slično kao u prethodnom zadatku dobijemo da je

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

20.54. $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 2k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k,$$ itd.

Ako treba, vidjeti dva prethodna zadatka.

Rezultat:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

20.55. Ovu i njoj slične sume možemo zgodno odrediti ovako: sumu $\sum_{k=1}^{n} a_k$ transformišemo u oblik $\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})$ iz koga slijedi

$$(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Tako u našem zadatku imamo:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

20.56. Na osnovu rezultata u prethodnom zadatku uviđamo da je data jednačina ekvivalentna jednačini

$$\frac{\frac{x}{2}[1 + (2x-1)]}{\frac{x}{x+1}} - 110 = 0.$$

Rješenje jednačine je $x = 10$.

20.57. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}.$$

20.58. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

20.59. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(4k^2-1)+1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n}{2n+1}=\frac{n}{4}+\frac{n}{4(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

U vezi sa jednakošću (1) vidjeti zadatak 20.57.

20.60. Pošto posmatrani brojevi čine aritmetički niz, to je $a_{k+1}-a_k=d$ (diferencija niza), $k=1,2,\ldots,n-1$. Zato imamo:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{d}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\ldots=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_n-a_1}{a_1 a_n}=\ldots=\frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

20.61.* *Prvi način.* 1° Za $x\neq 1$ možemo pisati:

$$S_n(x)=\frac{x-1}{x-1}\cdot S_n(x)=\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)(x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n)=$$

$$=\frac{1}{x-1}\left[(x^2+2x^3+3x^4+\ldots+nx^{n+1})-(x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n)\right]=$$

$$=\frac{1}{x-1}(-x-x^2-x^3-\ldots-x^n+nx^{n+1})=\ldots=\frac{1}{(x-1)^2}\left[nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\right].$$

2° Za $x=1$ je, očito, $S_n(x)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Drugi način.

$$\sum_{k=1}^{n}kx^k=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=$$
$$=x+x^2+x^3+\ldots+x^n+$$
$$+x^2+x^3+\ldots+x^n+$$
$$+x^3+\ldots+x^n+$$
$$+\ldots+$$
$$+x^{n-1}+x^n+$$
$$+x^n.$$

Dobili smo n geometrijskih nizova, itd.

20.62.* a) Poslužićemo se sumom $S_n(x)$ iz prethodnog zadatka. Ta suma za $x = 2$ izgleda ovako:

$$S_n(2) = n \cdot 2^{n+2} - (n+1) \cdot 2^{n+1} + 2,$$

pa imamo:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) \cdot 2^k = 2 \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k + \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2S_n(2) + \sum_{k=1}^{n} 2^k =$$

$$= n \cdot 2^{n+3} - (n+1) \cdot 2^{n+2} + 4 + 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = \ldots =$$

$$= n \cdot 2^{n+3} - n \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1} + 2 =$$

$$= n \cdot 2^{n+2}(2 - 1) - 2^{n+1} + 2 = n \cdot 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2.$$

b) *Uputa*: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k,$

pa u formulu iz prethodnog zadatka staviti da je $x = \frac{1}{2}$.

Rezultat je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} = 4 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{n}{2^{n-1}}.$$

LITERATURA

1. N. P. Antonov i dr.: Sbornik zadač po elementarnoj matematike, Moskva 1958.
2. I. L. Balinskaja: Zadači matematičeskih olimpijad, Moskva 1975.
3. M. I. Bašmakov i dr.: Zadači po matematike — algebra i analiz, Moskva 1982.
4. V. Bogoslavov: Zbirka rešenih zadataka iz algebre I, Beograd 1984.
5. V. Bogoslavov: Zbirka rešenih zadataka iz algebre za II razred gimnazije, Beograd 1972.
6. V. Bogoslavov: Zbirka rešenih zadataka iz matematike za IV razred gimnazije, Beograd 1970.
7. I. T. Borodulja: Pokazateljnaja i logaritmičeskaja funkcii, Moskva 1984.
8. M. Bračković, I. Demirdžić: Elementarna matematika za pripremu kvalifikacionih ispita na Mašinskom fakultetu, Sarajevo 1984.
9. V. Devide: Zadaci iz apstraktne algebre, Beograd 1974.
10. G. Dorofeev i dr.: Elementary Mathematics, Moskva.
11. H. Fatkić, B. Mesihović: Zbirka riješenih zadataka iz matematike I, ETF Sarajevo 1973.
12. V. M. Govorov i dr.: Sbornik konkursnih zadač po matematike, Moskva 1983.
13. A. I. Hudolin i dr.: Sbornik zadač po algebre i elementarnim funkcijam, Moskva 1970.
14. R. A. Kalnin: Algebra i elementarnie funkcii, Moskva 1973.
15. R. Kašanin: Viša matematika, Beograd 1949.
16. S. Klašnja: Elementarna matematika I, skripta, Sarajevo 1963.
17. L. V. Kovancova, I. G. Mališev: Sbornik zadač po matematike, Kiev 1980.
18. V. A. Krečmar: Zadačnik po algebre, Moskva 1961.
19. S. Kurepa: Uvod u matematiku — skupovi, strukture, brojevi, Zagreb 1970.
20. S. V. Kušćenko: Zbirka zadataka sa prijemnih ispita, velikih matura i matematičkih olimpijada, Beograd 1970.
21. A. A. Leman: Zbirka zadataka s moskovskih matematičkih olimpijada, Beograd 1966.
22. V. B. Lidskij i dr.: Zadači po elementarnoj matematike, Moskva 1970.
23. S. E. Ljapin, I. V. Baranova: Sbornik zadač po elementarnoj matematike, Moskva 1960.
24. M. Malenica, H. Đulić — Mulahalilović: Zbirka zadataka iz matematike sa rješenjima, Sarajevo 1975.
25. S. Mintaković: Zbirka zadataka iz algebre III dio, Sarajevo 1977.
26. S. Mintaković: Zbirka zadataka iz matematike — logika, skupovi, algebra za I razred srednjih škola, Sarajevo 1980.
27. D. S. Mitrinović: Linearna algebra, analitička geometrija, polinomi, Beograd 1959.
28. D. S. Mitrinović: Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rješenjima I, Beograd 1971.
29. P. S. Modenov: Sbornik zadač po specijaljnom kursu elementarnoj matematike, Moskva 1960.
30. S. I. Novoselov: Specijaljnij kurs elementarnoj algebri, Moskva 1958.
31. B. Pavković, N. Horvatić: Matematika I za I razred srednjih škola, Zagreb 1978.
32. M. E. Podtjagin: Elementarnaja matematika, Višaja škola, Moskva 1970.
33. S. Prešić, B. Alimpić: Zbirka zadataka iz matematike za I razred srednjih škola, Sarajevo 1977.
34. M. Radić: Algebra I dio — logika, skupovi, brojevi, Zagreb 1970.
35. J. Rivaud: Exercices d' algebre, Paris 1961.
36. I. H. Sivašinskij: Neravenstva v zadačah, Moskva 1967.
37. I. H. Sivašinskij: Teoremi i zadači po algebre i elementarnim funkcijam, Moskva 1971.
38. I. S. Sominskij: Elementarnaja algebra, Moskva 1967.
39. B. Stojanović: Zbirka zadataka iz matematike, Sarajevo 1981.
40. K. U. Šahno: Sbornik zadač po elementarnoj matematike povišenoj trudnosti, Minsk 1966.
41. D. O. Škljarskij i dr.: Izbranie zadači i teoremi elementarnoj matematiki, Moskva 1965.
42. J. Ušan, V. Đonin, R. Tošić: Uvod u algebru sa metodičkom zbirkom zadataka, Novi Sad 1979.
43. M. Uščumlić, P. Miličić: Zbirka zadataka iz više matematike I, Beograd 1973.
44. E. B. Vahovskij, A. A. Rivkin: Zadači po elementarnoj matematike, Moskva 1969.
45. N. B. Vasiljev, A. A. Jegorov: Zbirka pripremnih zadataka sa sveruskih olimpijada mladih matematičara, Beograd 1965.
46. V. V. Zaitsev i dr.: Elementary mathematics, Moscow.

Pri sastavljanju Zbirke korišćeni su i neki brojevi časopisa Kvant, Matematičko-fizički list i Matematika v školje, a uneseni su i neki zadaci sa kvalifikacionih ispita i pismenih ispita iz Uvoda u matematiku na Elektrotehničkom fakultetu u Sarajevu i pismenih ispita iz Uvoda u matematiku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu.

U izdanju Zavoda su objavljeni sljedeći univerzitetski udžbenici i zbirke zadataka:

dr Veselin Perić	Algebra I: prsteni i moduli, linearna algebra
dr Veselin Perić:	Algebra II: opšte algebarske strukture, teorija polja, algebarske jednačine
dr Miloš Tomić:	Matematika-diferencijalne jednačine, integrali, funkcije kompleksne promjenljive
mr Muhamed Bračković:	Matematika-determinante, sistemi linearnih jednačina, elementi vektorske algebre i analitičke geometrije
mr Muhamed Bračković:	Matematika-diferencijalni račun funkcije jedne promjenljive
dr V. Perić, dr M. Tomić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike II, sveska I: diferencijalne jednačine
dr V. Perić, dr M. Tomić, P. Karačić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike II, sveska II: diferencijalna geometrija, višestruki, linijski i površinski integrali, vektorska analiza
dr V. Perić, dr M. Tomić, P. Karačić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike II, sveska III: funkcije kompleksne promjenljive, redovi, Laplasova transformacija
M. Kulišić:	Zbirka riješenih zadataka iz matematike I: neodređeni integral
Grupa autora:	Zbirka zadataka iz teorije funkcija kompleksne promjenljive,
mr H. Fatkić, V. Dragičević:	Zbirka zadataka — diferencijalni račun funkcija dvije i više promjenljivih
mr H. Fatkić, V. Dragičević:	Zbirka zadataka — određeni i višestruki integrali
dr Miloš Tomić:	Diferencijalne jednačine
mr Muhamed Bračković:	Matematika — integralni račun funkcije jedne promjenljive, funkcije dviju promjenljivih
mr Branislav Stojanović:	Zbirka zadataka iz matematike — jednačine i nejednačine sa apsolutnim vrijednostima, matematička indukcija, binomni obrazac, kompleksni brojevi, determinante i sistemi linearnih jednačina, vektorska algebra, analitička geometrija u prostoru